FISICA I — RESUMEN TEORICO — HOJA Nº 1

FECHA

## 1) TEOREMA DE VARIGNON

El torque $\tau$ debemos decir que es igual a una fuerza x brazo de palanca; decimos que el torque de una fuerza es el producto de una fuerza, por una distancia. [N. m]

$$\tau = \vec{r} \times \vec{F}$$

Si consideramos el caso de varias fuerzas concurrentes, $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, $\vec{F_3}$ ... que tienen como punto de aplicación el punto A. El Torque de cada fuerza $\vec{F_i}$ con respecto a O es.

$$\vec{\tau_i} = \vec{r} \times \vec{F_i}$$

El vector posición $\vec{r}$ será el mismo, pues son todos concurrentes.

El $\tau_R = \vec{r} \times \vec{R}$ donde $\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \ldots + \vec{F_n}$

$$\vec{r} \times \vec{R} = \vec{r} \times (\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \ldots + \vec{F_n})$$

$$\vec{r} \times \vec{R} = \vec{r} \times \vec{F_1} + \vec{r} \times \vec{F_2} + \vec{r} \times \vec{F_3} + \ldots + \vec{r} \times \vec{F_n}$$

$$\boxed{\bar{\tau} = \bar{\tau}_1 + \bar{\tau}_2 + \bar{\tau}_3 + \ldots + \bar{\tau}_n = \sum \bar{\tau}_i}$$

$\vec{F_1}$ $\vec{F_2}$ A $\vec{F_3}$ $\vec{r}$ O

"El torque de la resultante es igual a la suma vectorial de los torques de las fuerzas componentes si estas son concurrentes"

## 2) CAIDA LIBRE

Se dice que un cuerpo está en caida libl solamente cuando cae en el vacio. Sin embargo, en algunos casos se puede considerar que las ecuaciónes de caida libl son

NOTA

válidas, esto es así cuando la fuerza de sustentación del fluido es despreciable.

Es un movimiento uniformemente variado, son validos todos las expresiones del MRUV, con la salvedad de que la aceleración será igual a "g".

$V_i = 0$

$$V_f = \sqrt{2gh}$$

$a = g$

---

## (3) TIRO VERTICAL

El tiro vertical como se muestra en la figura, durante el ascenso el mov. sera desacelerado hasta alcanzar su altura máxima, en donde $V = 0$; posteriormente se comporta como caida libe (mov. acelerado).



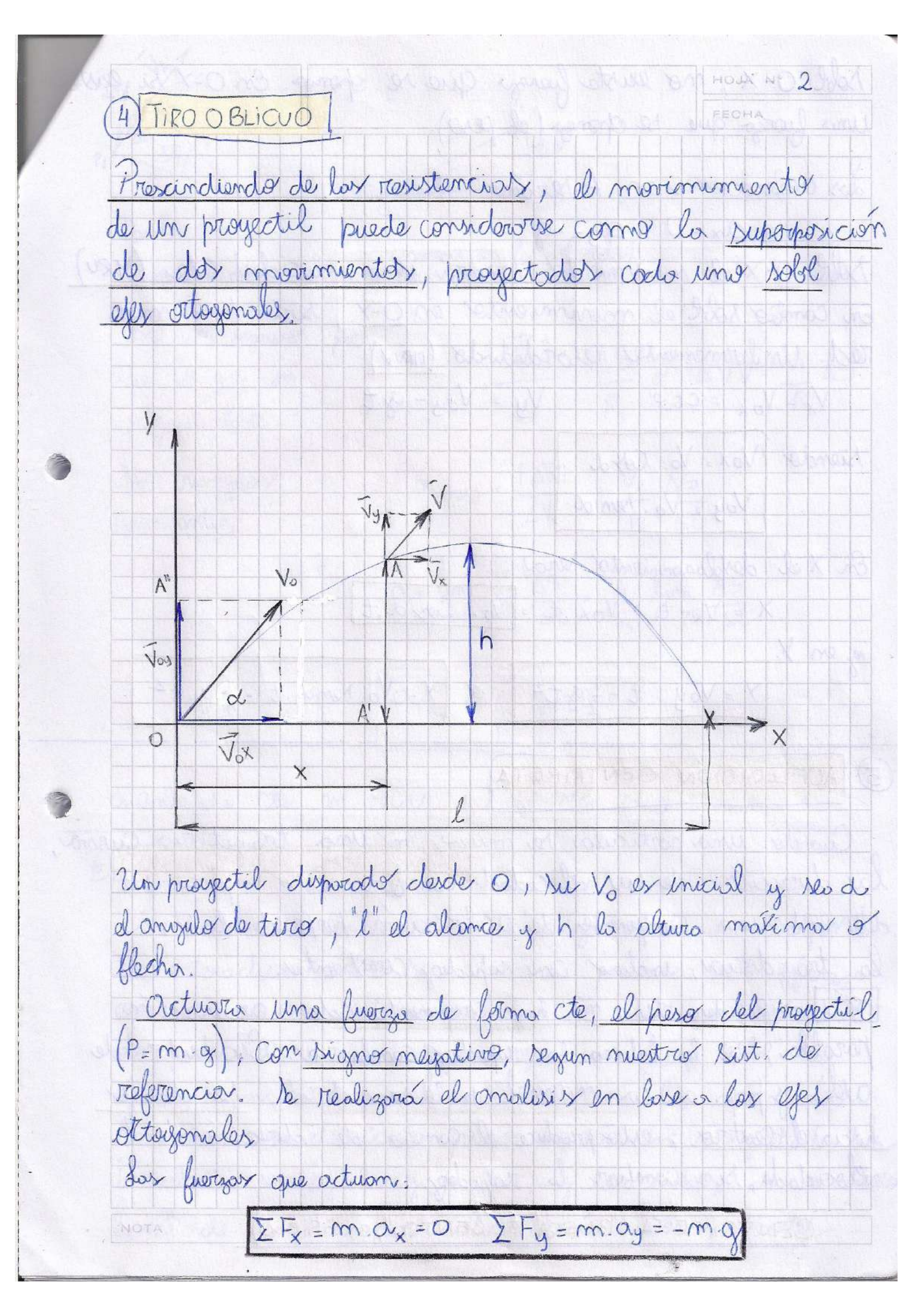
$$V = V_0 - g.t$$

$$Y = V_0.t - \frac{1}{2} g t^2$$

$a = -g$

# 4 TIRO OBLICUO

Prescindiendo de las resistencias, el movimimiento de un proyectil puede considerarse como la superposición de dos movimientos, proyectados cada uno sobre ejes ortogonales.




Un proyectil disparado desde O, su $V_0$ es inicial y sea $\alpha$ el angulo de tiro, "$l$" el alcance y h la altura máxima o flecha.

Actuara una fuerza de forma cte, el peso del proyectil ($P = m \cdot g$), con signo negativo, segun nuestro sist. de referencia. Se realizará el analisis en base a los ejes ortogonales

Las fuerzas que actuan:

$$\Sigma F_x = m . a_x = 0 \quad \Sigma F_y = m . a_y = -m . g$$

Sobre O-X, no existe fuerza que se oponga. En O-Y si existe una fuerza que se oponga (el peso).

Las aceleraciones en A serán:

$a_x = 0 \quad a_y = -g$

Sobre O-X el movimiento tendrá una velocidad cte. (MRU)

En cambio sobre el movimiento en O-Y será un mov. rect. Uniformemente retardado. (MRUV)

$V_x = V_{0x} = cte \qquad V_y = V_{0y} - g.t$

siendo

$$V_{0x} = V_0 . \cos\alpha$$
$$V_{0y} = V_0 . \operatorname{sen}\alpha$$

En X el desplazamiento será

$$X = V_x . t = V_{0x} . t = V_0 . \cos\alpha . t$$

y en Y.

$$Y = V_{0y} . t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{ó} \quad Y = V_0 . \operatorname{sen}\alpha . t - \frac{1}{2} g . t^2$$

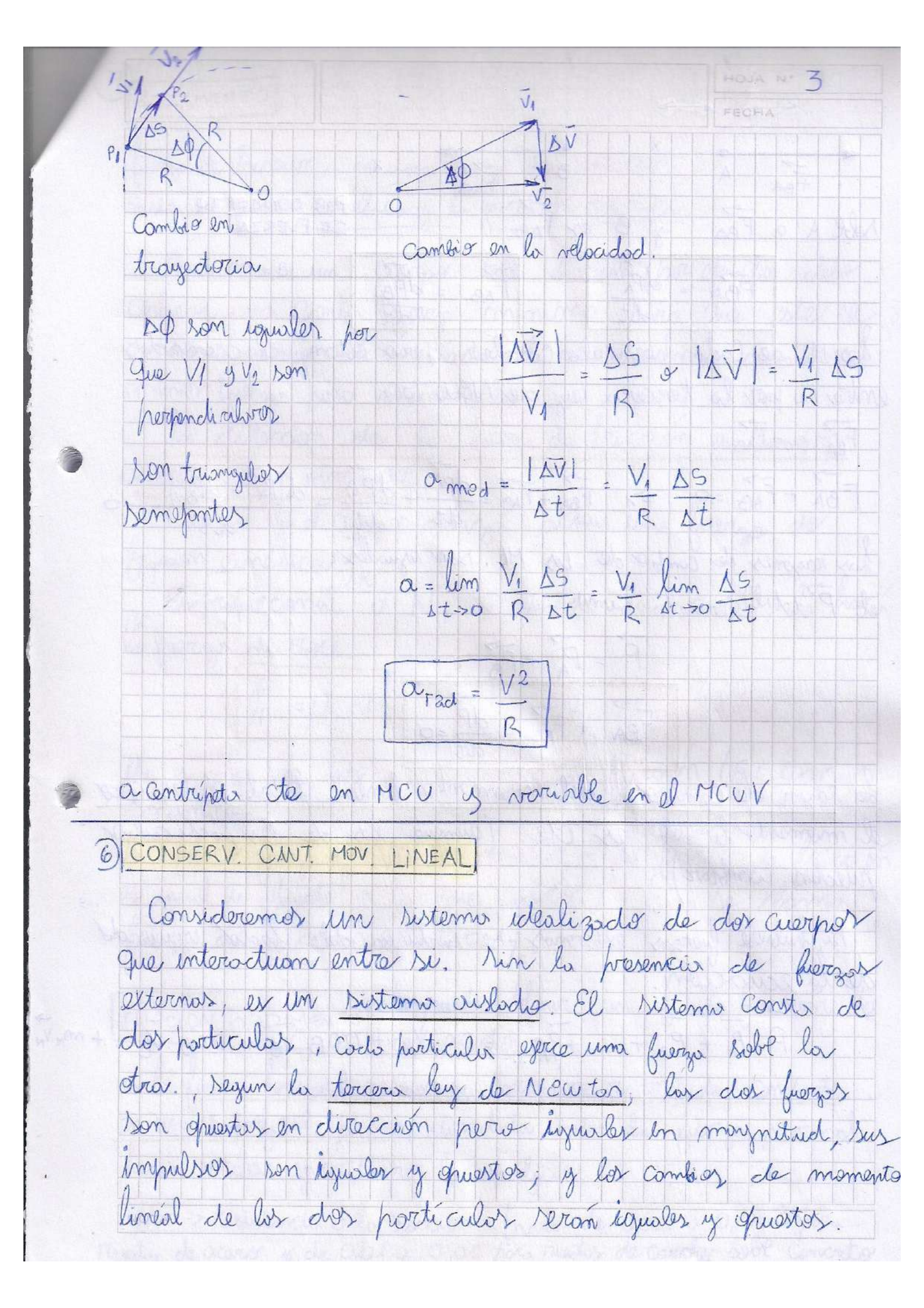
---

## (5) ACELERACIÓN CENTRIPETA

Cuando una partícula se mueve en una trayectoria curva, la dirección de su velocidad cambia. Esto implica que debe existir una componente de aceleración perpendicular a la trayectoria, incluso con rapidez constante.

MCU → Rapidez cte; no hay componente de aceleración paralela, si la hubiera la rapidez cambiaría. El vector de acel. es perp. a la normal de la trayectoria; se dirige hacia el centro.; esto produce el cambio de dirección de la velocidad, sin cambiar la rapidez.

NOTA: CENTRIPETA ("BUSCA EL CENTRO", en GRIEGO)




Cambio en trayectoria

Cambio en la velocidad.

$\Delta\phi$ son iguales porque $V_1$ y $V_2$ son perpendiculares

$$\frac{|\Delta\vec{V}|}{V_1} = \frac{\Delta S}{R} \quad o \quad |\Delta\vec{V}| = \frac{V_1}{R}\Delta S$$

Son triangulos semejantes

$$a_{med} = \frac{|\Delta \vec{V}|}{\Delta t} = \frac{V_1}{R}\frac{\Delta S}{\Delta t}$$

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{V_1}{R}\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{V_1}{R}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}$$

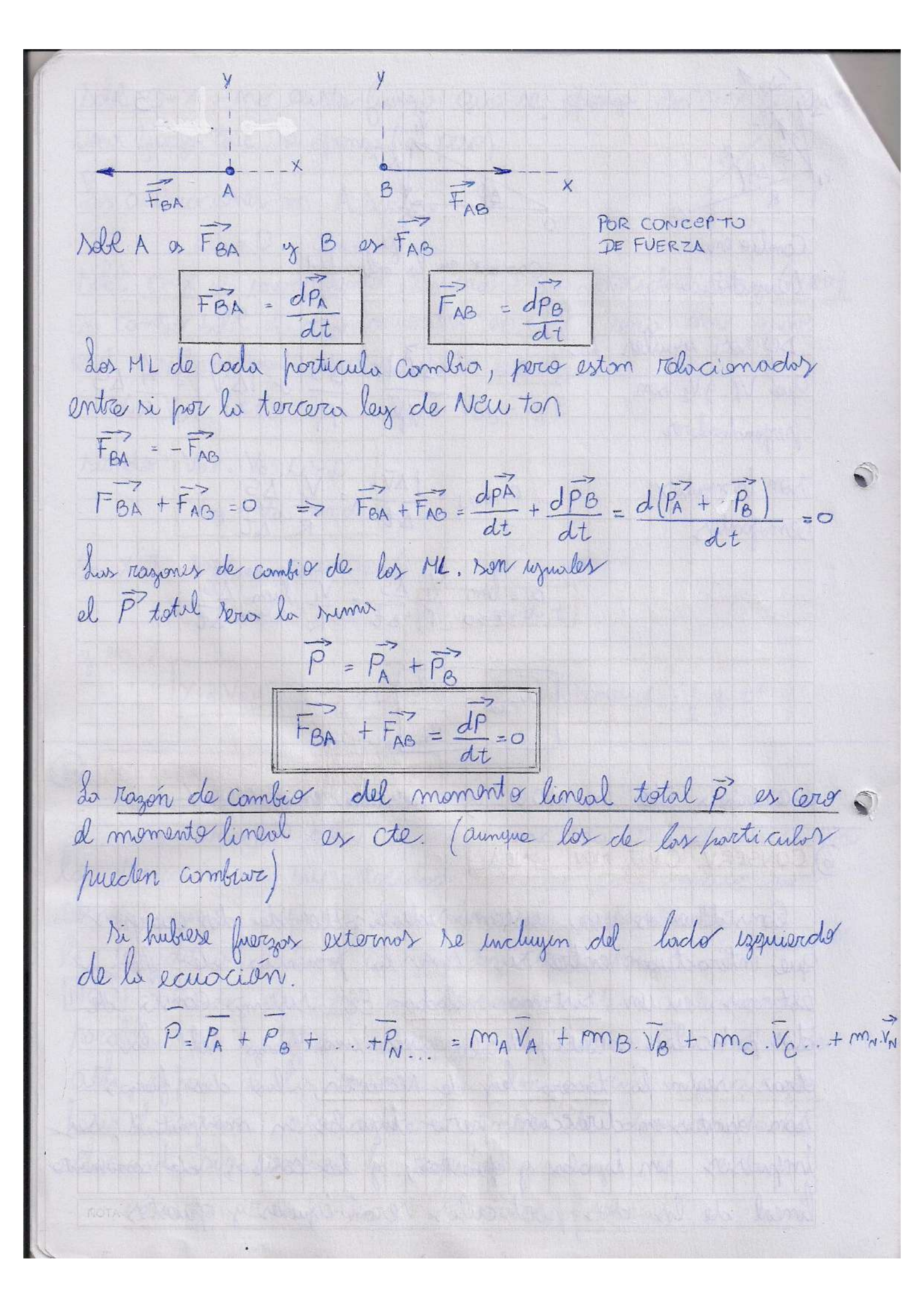
$$\boxed{a_{rad} = \frac{V^2}{R}}$$

a centripeta cte en MCU y variable en el MCUV

---

## 6) CONSERV. CANT. MOV. LINEAL

Consideremos un sistema idealizado de dos cuerpos que interactuan entre si. Sin la presencia de fuerzas externas, es un sistema aislado. El sistema consta de dos particulas, cada particula ejerce una fuerza sobre la otra. Segun la tercera ley de Newton, las dos fuerzas son opuestas en dirección pero iguales en magnitud, sus impulsos son iguales y opuestos; y los cambios de momento lineal de las dos particulas serán iguales y opuestos.




Sobre A es $\vec{F}_{BA}$ y B es $\vec{F}_{AB}$

POR CONCEPTO DE FUERZA

$$\boxed{\vec{F}_{BA} = \frac{d\vec{P}_A}{dt}} \qquad \boxed{\vec{F}_{AB} = \frac{d\vec{P}_B}{dt}}$$

Los ML de cada partícula cambia, pero están relacionados entre sí por la tercera ley de Newton

$$\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$$

$$\vec{F}_{BA} + \vec{F}_{AB} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{BA} + \vec{F}_{AB} = \frac{d\vec{P}_A}{dt} + \frac{d\vec{P}_B}{dt} = \frac{d(\vec{P}_A + \vec{P}_B)}{dt} = 0$$

Las razones de cambio de los ML. son iguales

el $\vec{P}$ total será la suma

$$\vec{P} = \vec{P}_A + \vec{P}_B$$

$$\boxed{\vec{F}_{BA} + \vec{F}_{AB} = \frac{d\vec{P}}{dt} = 0}$$

La razón de cambio del momento lineal total $\vec{p}$ es cero el momento lineal es cte. (aunque los de las partículas pueden cambiar)

Si hubiese fuerzas externas se incluyen del lado izquierdo de la ecuación.

$$\bar{P} = \bar{P}_A + \bar{P}_B + \ldots + \bar{P}_N \ldots = m_A \bar{V}_A + m_B \cdot \bar{V}_B + m_C \cdot \bar{V}_C \ldots + m_N \vec{V}_N$$

(7) ROZAMIENTO



fuerza de friccion, es una fuerza de contacto.
Existe la fricción cinética y la fricción estática.

Para mover un cuerpo sobre el suelo (por ejemplo) debo aplicar una cierta fuerza minima para que este se mueva; luego de iniciado el movimiento necesitaré menor fuerza para mantenerlo.

La dirección de la fuerza de fricción es siempre opuesta al movimiento.

Cuando ya el cuerpo desliza actua una fuerza de fricción cinética. $\vec{f}_K$

Es proporcional a N; si aumenta la normal, lo hará la fuerza de roce.

$$f_r = \mu . N \qquad f_{r_c} = \mu_K . N$$

$\mu$ y $\mu_K$ son los coeficientes de fricción (Estatico y dinamico)

Si aplico fuerza y NO se mueve; la fuerza de fricción es igual y opuesta a la que aplico; Esta se llama fuerza de fricción estática. $\vec{f}_r$.

FRICCION RODAMIENTO — Se puede definir un cof. de fricción de rodamiento $\mu_r$

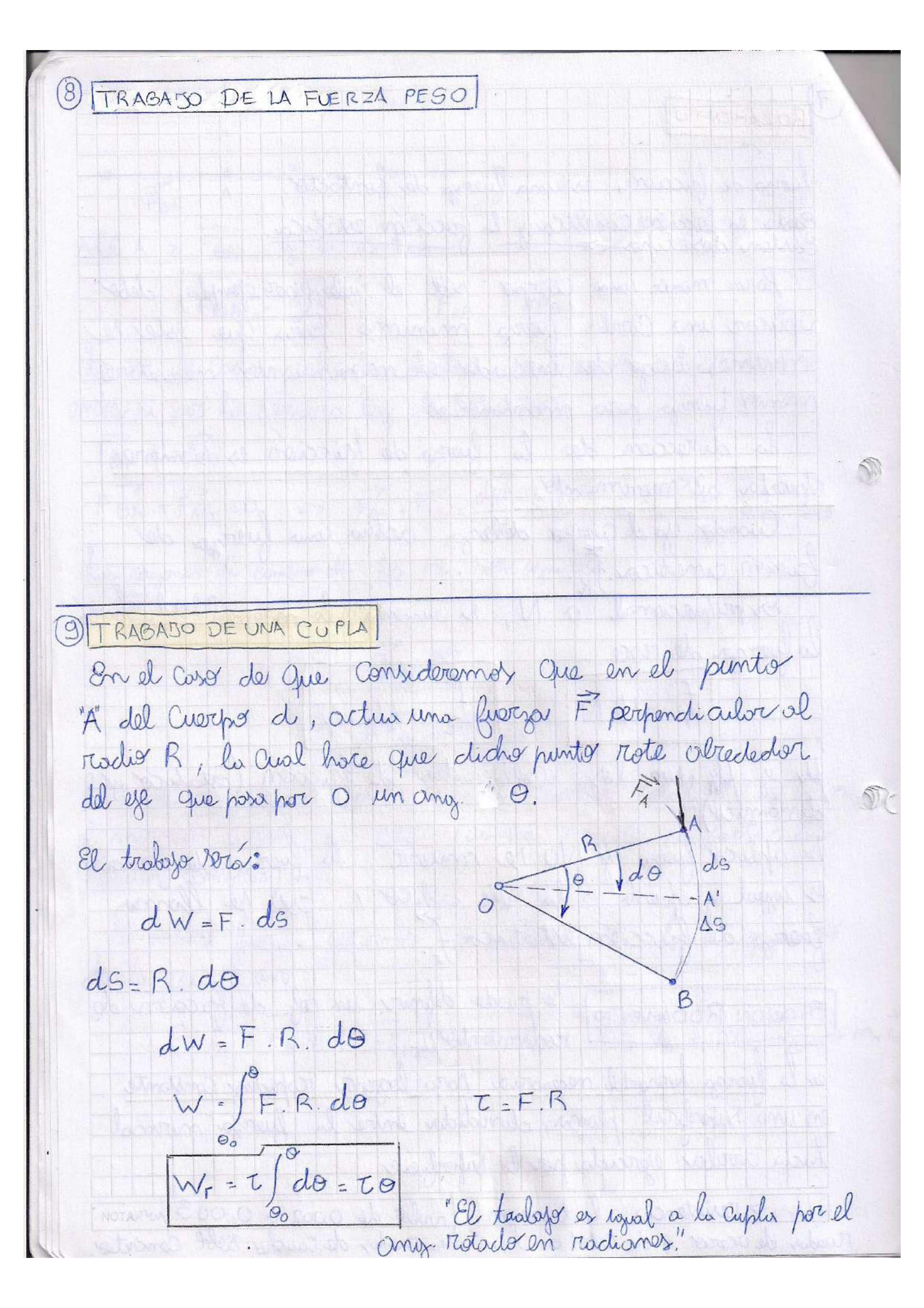
es la fuerza horizontal necesaria para lograr rapidez constante en una superficie plana, dividida entre la fuerza normal hacia arriba ejercida por la superficie.

$\mu_r$ → resistencia a la tracción (valor de 0,002 a 0,003 para ruedas de acero y de 0,01 a 0,02 para ruedas de caucho sobre concreto.

## ⑧ TRABAJO DE LA FUERZA PESO

## ⑨ TRABAJO DE UNA CUPLA

En el caso de que consideremos que en el punto "A" del cuerpo d, actua una fuerza $\vec{F}$ perpendicular al radio R, la cual hace que dicho punto rote alrededor del eje que pasa por O un ang. $\theta$.




El trabajo será:

$$dW = F \cdot ds$$

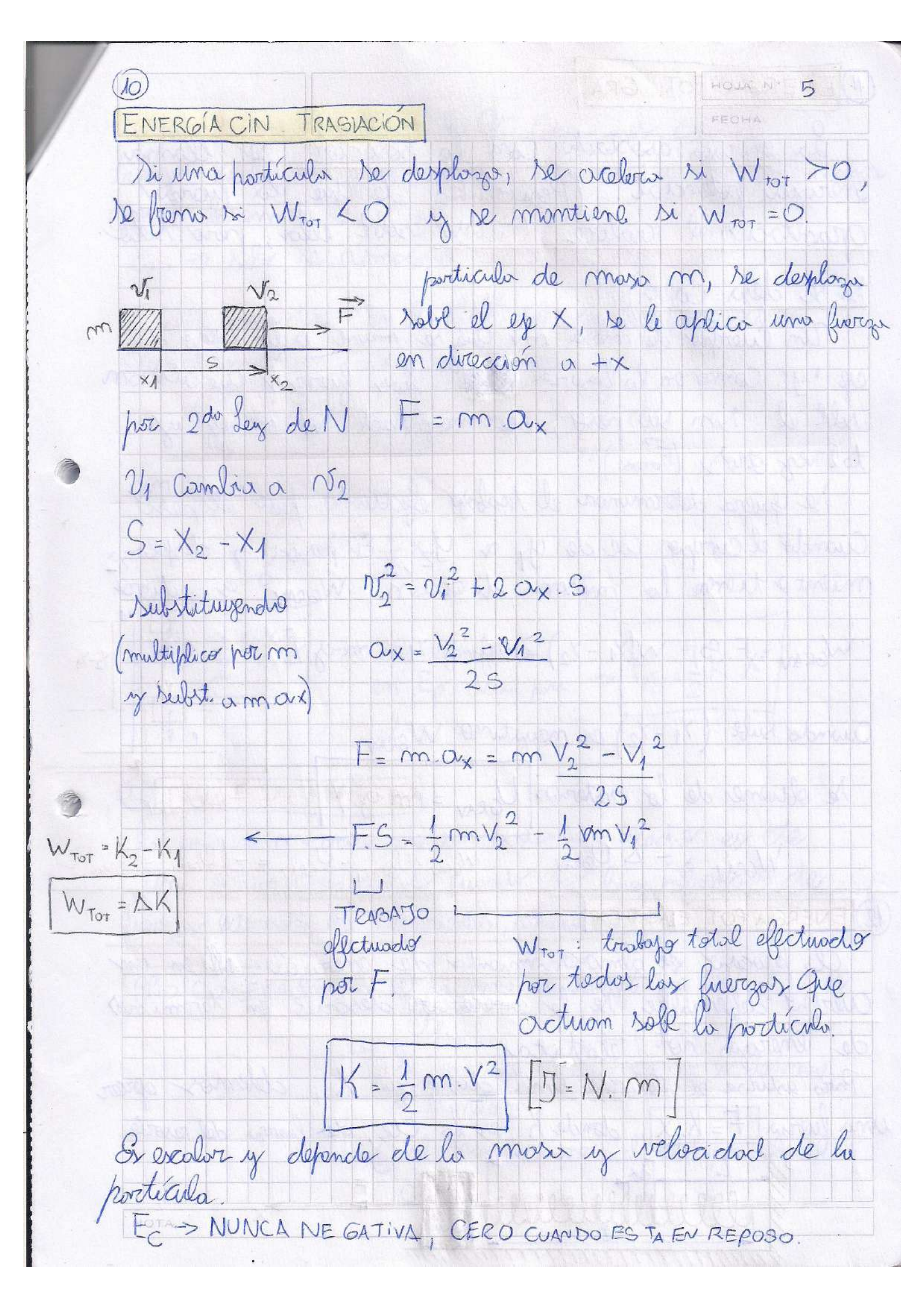
$$ds = R \cdot d\theta$$

$$dW = F \cdot R \cdot d\theta$$

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta} F \cdot R \cdot d\theta \qquad \tau = F \cdot R$$

$$\boxed{W_r = \tau \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \tau\theta}$$

"El trabajo es igual a la cupla por el ang. rotado en radianes."



## ENERGÍA CIN. TRASLACIÓN

Si una partícula se desplaza, se acelera si $W_{TOT} > 0$, se frena si $W_{TOT} < 0$ y se mantiene si $W_{TOT} = 0$.



partícula de masa m, se desplaza sobre el eje X, se le aplica una fuerza en dirección a +x

por 2do Ley de N $F = m.a_x$

$v_1$ cambia a $v_2$

$S = X_2 - X_1$

$$v_2^2 = v_1^2 + 2a_x.S$$

substituyendo (multiplico por m y subst. a m.ax)

$$a_x = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2S}$$

$$F = m.a_x = m\frac{V_2^2 - V_1^2}{2S}$$

$W_{TOT} = K_2 - K_1$ ⟵ $F.S = \frac{1}{2}mV_2^2 - \frac{1}{2}mV_1^2$

$W_{TOT} = \Delta K$

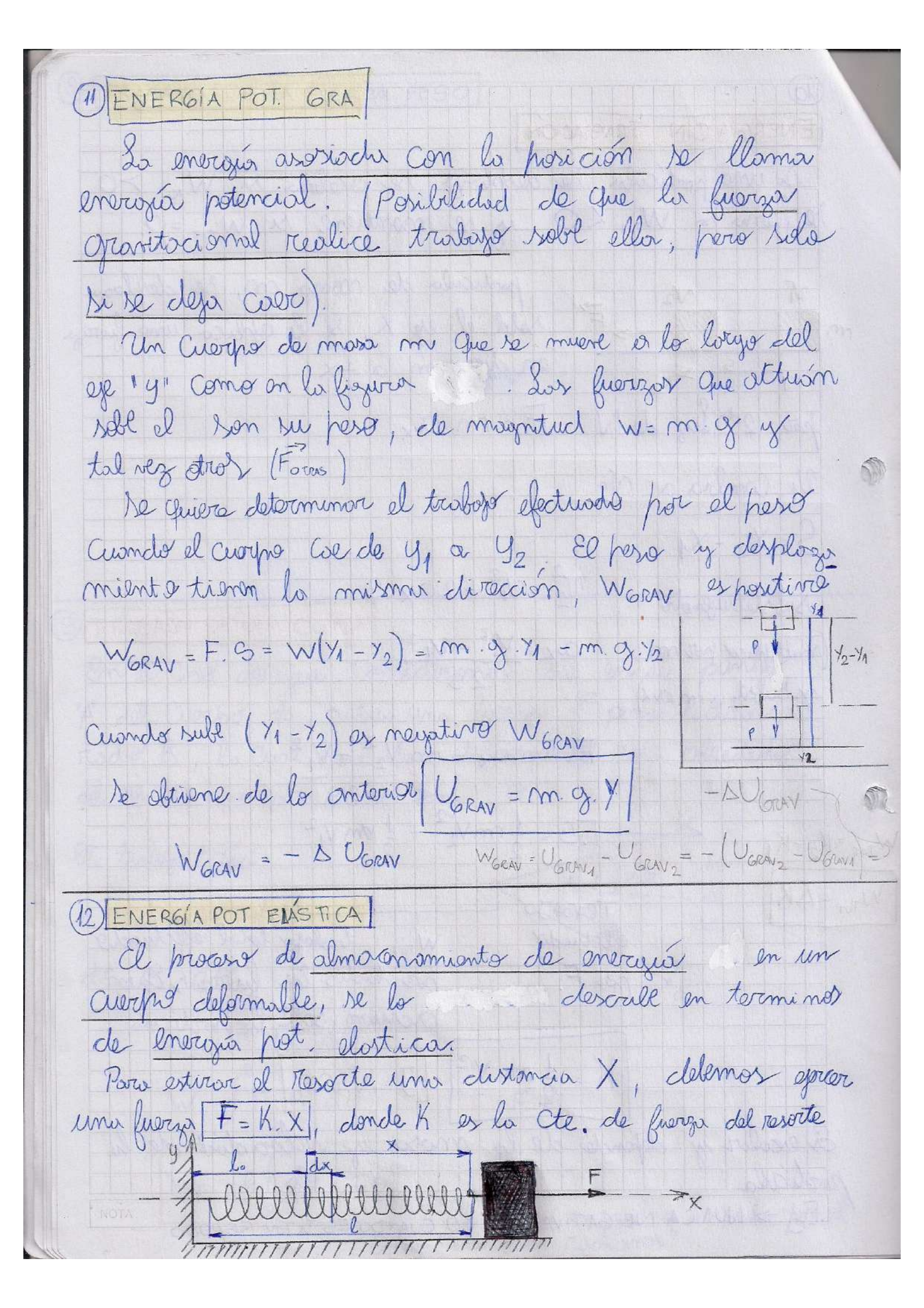
F.S: TRABAJO efectuado por F.

$W_{TOT}$: trabajo total efectuado por todas las fuerzas que actuan sobre la partícula.

$$K = \frac{1}{2}m.V^2 \quad [J = N.m]$$

Es escalar y depende de la masa y velocidad de la partícula.

$E_C$ -> NUNCA NEGATIVA, CERO CUANDO ESTA EN REPOSO.



## (11) ENERGÍA POT. GRA

La energía asociada con la posición se llama energía potencial. (Posibilidad de que la fuerza gravitacional realice trabajo sobre ella, pero sólo si se deja caer).

Un cuerpo de masa m que se mueve a lo largo del eje "y" como en la figura . Las fuerzas que actúan sobre él son su peso, de magnitud $w = m \cdot g$ y tal vez otros ($\vec{F}_{otras}$)

Se quiere determinar el trabajo efectuado por el peso cuando el cuerpo cae de $y_1$ a $y_2$. El peso y desplazamiento tienen la misma dirección, $W_{GRAV}$ es positivo

$$W_{GRAV} = F \cdot S = w(y_1 - y_2) = m \cdot g \cdot y_1 - m \cdot g \cdot y_2$$



Cuando sube $(y_1 - y_2)$ es negativo $W_{GRAV}$

Se obtiene de lo anterior $\boxed{U_{GRAV} = m \cdot g \cdot y}$

$-\Delta U_{GRAV}$

$$W_{GRAV} = -\Delta U_{GRAV}$$

$W_{GRAV} = U_{GRAV_1} - U_{GRAV_2} = -(U_{GRAV_2} - U_{GRAV_1}) =$

## (12) ENERGÍA POT ELÁSTICA

El proceso de almacenamiento de energía en un cuerpo deformable, se lo describe en términos de energía pot. elástica.

Para estirar el resorte una distancia X, debemos ejercer una fuerza $\boxed{F = K \cdot X}$, donde K es la Cte. de fuerza del resorte

Se procede igual que con Ep. G. Comenzamos con el trabajo realizado por la fuerza elástica y lo combinamos con el teorema de T y E

$E_{pe}$ → solo se almacena en el resorte

F debe coincidir con el eje del resorte (trayectoria)

Considerando un dx, el W será.

$$W = \int_{x_0}^{x_1} F.dx = \int_{x_0}^{x_1} K.x\,dx = K\int_{x_0}^{x_1} x.dx$$

con $x_0 = 0$ ; $x_1 = x$

$$\int_0^l x.dx = \frac{1}{2}x^2$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2}Kx^2}$$ → se transforma en Ep. acum. por el x → $$\boxed{E_{pe} = \frac{1}{2}Kx^2}$$

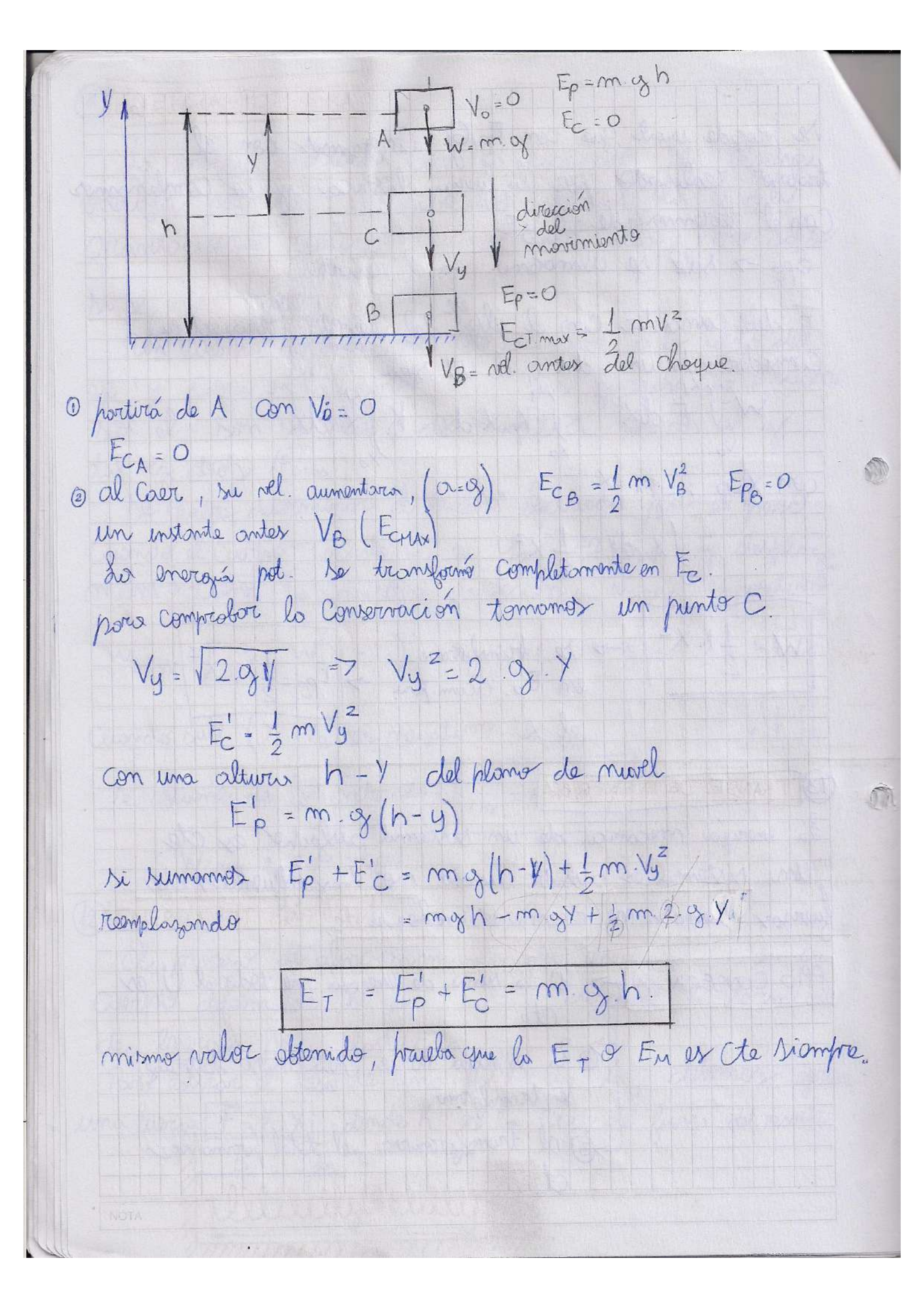
---

## (13) TRANSF. DE LA ENERGÍA

La energía mecánica de un sistema aislado es cte.

Un sistema es aislado cuando no hay influencias de fuerzas externas, ni rozamientos, choques, etc.

PPIO CONSERVACIÓN →
- ① La suma de energías de todo el U. es cte.
- ② La energía no se crea ni se destruye, se transforma.
- ③ al transformarse, el total permanece cte.




① partirá de A con $V_0 = 0$

$E_{C_A} = 0$

② al caer, su vel. aumentará, $(a = g)$ $\quad E_{C_B} = \frac{1}{2} m V_B^2 \quad E_{P_B} = 0$

un instante antes $V_B$ ($E_{CMAX}$)

La energía pot. se transformó completamente en $E_c$.

para comprobar la conservación tomamos un punto C.

$$V_y = \sqrt{2.g.Y} \Rightarrow V_y^2 = 2.g.Y$$

$$E'_C = \frac{1}{2} m V_y^2$$

Con una altura $h - y$ del plano de nivel

$$E'_P = m.g(h-y)$$

si sumamos $E'_P + E'_C = m.g(h-Y) + \frac{1}{2} m.V_y^2$

reemplazando $= mgh - m.gY + \frac{1}{2} m.2.g.Y$

$$E_T = E'_P + E'_C = m.g.h.$$

mismo valor obtenido, prueba que la $E_T$ o $E_M$ es cte siempre.

## (14) CHOQUE PLASTICO

Una vez producido los cuerpos quedan pegados, tienen la misma velocidad final $\vec{V_2}$

La Conserv. de ML: $m_A \cdot \vec{V_{A1}} + m_B \cdot \vec{V_{B1}} = (m_A + m_B)\vec{V_2}$

En un choque plastico la $E_c$ final es menor que la inicial. Los cuerpos se pegan y se mueven como uno solo despues del choque

Si suponemos un cuerpo con $m_A$ y componente X de velocidad $\bar{V}_{A1X}$ choca inelasticamente con un cuerpo de masa $m_B$ en reposo

$$m_A \cdot V_{A1X} = (m_A + m_B) \cdot V_{2X}$$

$$V_{2X} = \frac{m_A}{m_A + m_B} V_{A1X} \Leftarrow \frac{m_A}{(m_A + m_B)} V_{A1X} = V_{2X}$$

verifiquemos que la $E_{CF} < E_{CI}$

$$K_1 = \frac{1}{2} m_A V_{A1X}^2$$

$$K_2 = \frac{1}{2}(m_A + m_B) V_{2X}^2 = \frac{1}{2}(m_A + m_B)\left(\frac{m_A}{m_A + m_B}\right)^2 V_{A1X}^2$$

$$\boxed{\frac{K_2}{K_1} = \frac{m_A}{m_A + m_B}}$$

numerador siempre menor que el denominador, lado derecho es menor siempre.

---

## (15) CHOQUE ELASTICO

Es aquel que conserva la $E_c$ despues del choque. Ocurre cuando las fuerzas entre los cuerpos que chocan son conservativas.

NOTA

Un choque elástico entre A y B

$V_{A1X}$ ] Componentes $V_{0x}$ de los cuerpos
$V_{B1X}$

$V_{A2X}$ ] Componentes $V_{Fx}$ de los cuerpos
$V_{B2X}$

por conservación de $E_C$

$$\frac{1}{2} m_A V_{A1X}^2 + \frac{1}{2} m_B V_{B1X}^2 = \frac{1}{2} m_A V_{A2X}^2 + \frac{1}{2} m_B V_{B2X}^2$$

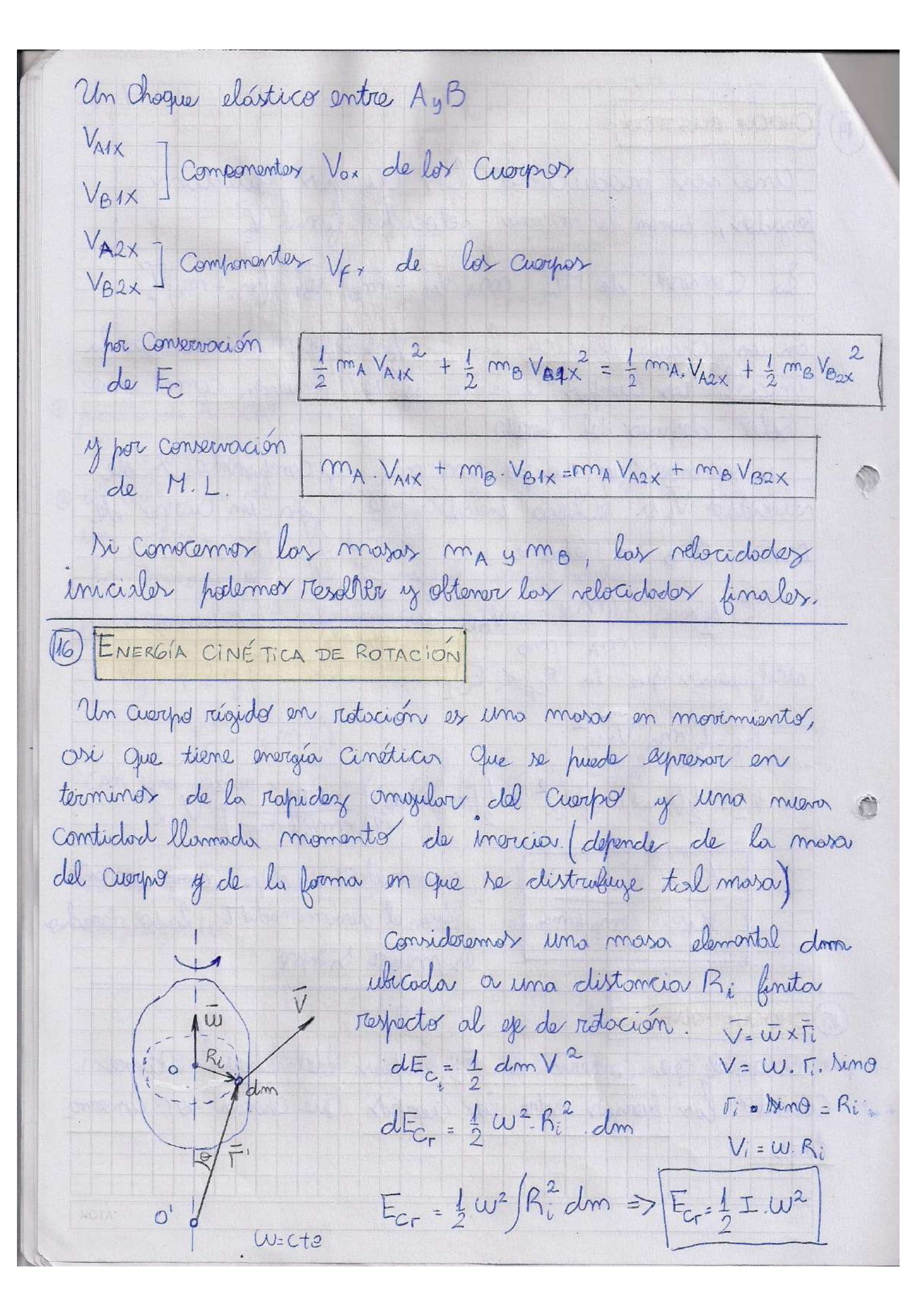
y por conservación de M. L.

$$m_A \cdot V_{A1X} + m_B \cdot V_{B1X} = m_A V_{A2X} + m_B V_{B2X}$$

Si conocemos las masas $m_A$ y $m_B$, las velocidades iniciales podemos resolver y obtener las velocidades finales.

## (16) ENERGÍA CINÉTICA DE ROTACIÓN

Un cuerpo rígido en rotación es una masa en movimiento, así que tiene energía cinética que se puede expresar en términos de la rapidez angular del cuerpo y una nueva cantidad llamada momento de inercia (depende de la masa del cuerpo y de la forma en que se distribuye tal masa)




Consideremos una masa elemental dm ubicada a una distancia $R_i$ finita respecto al eje de rotación.

$\bar{V} = \bar{\omega} \times \bar{r}_i$

$V = \omega . r_i . \sin\theta$

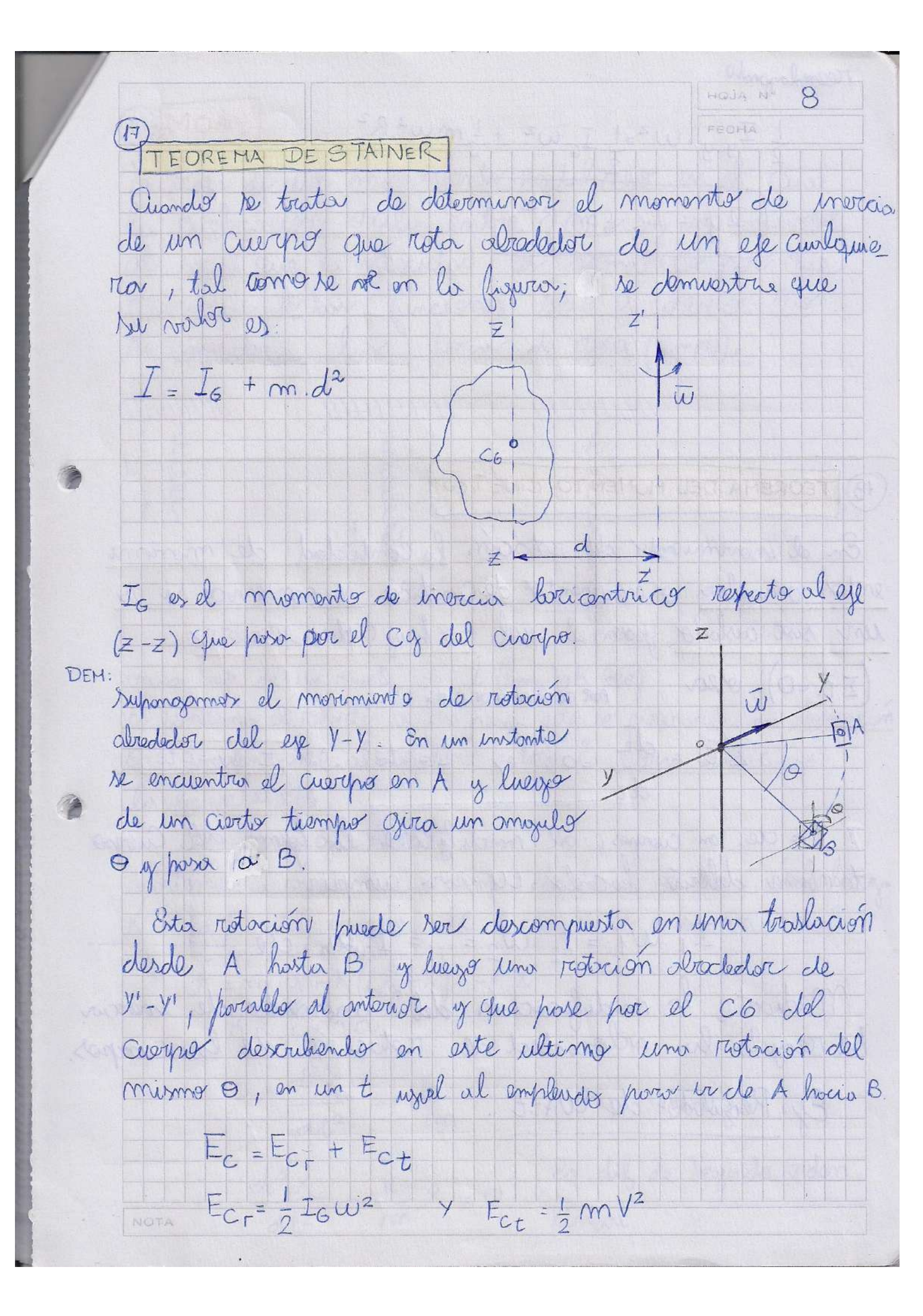
$r_i . \sin\theta = R_i$

$V_i = \omega . R_i$

$$dE_{C_t} = \frac{1}{2} dm V^2$$

$$dE_{C_r} = \frac{1}{2} \omega^2 . R_i^2 \, dm$$

$$E_{C_r} = \frac{1}{2} \omega^2 \int R_i^2 \, dm \Rightarrow \boxed{E_{C_r} = \frac{1}{2} I . \omega^2}$$





(17) TEOREMA DE STAINER

Cuando se trata de determinar el momento de inercia de un cuerpo que rota alrededor de un eje cualquiera, tal como se ve en la figura; se demuestra que su valor es:

$$I = I_G + m.d^2$$



$I_G$ es el momento de inercia baricentrico respecto al eje (Z-Z) que pasa por el Cg del cuerpo.

DEM:

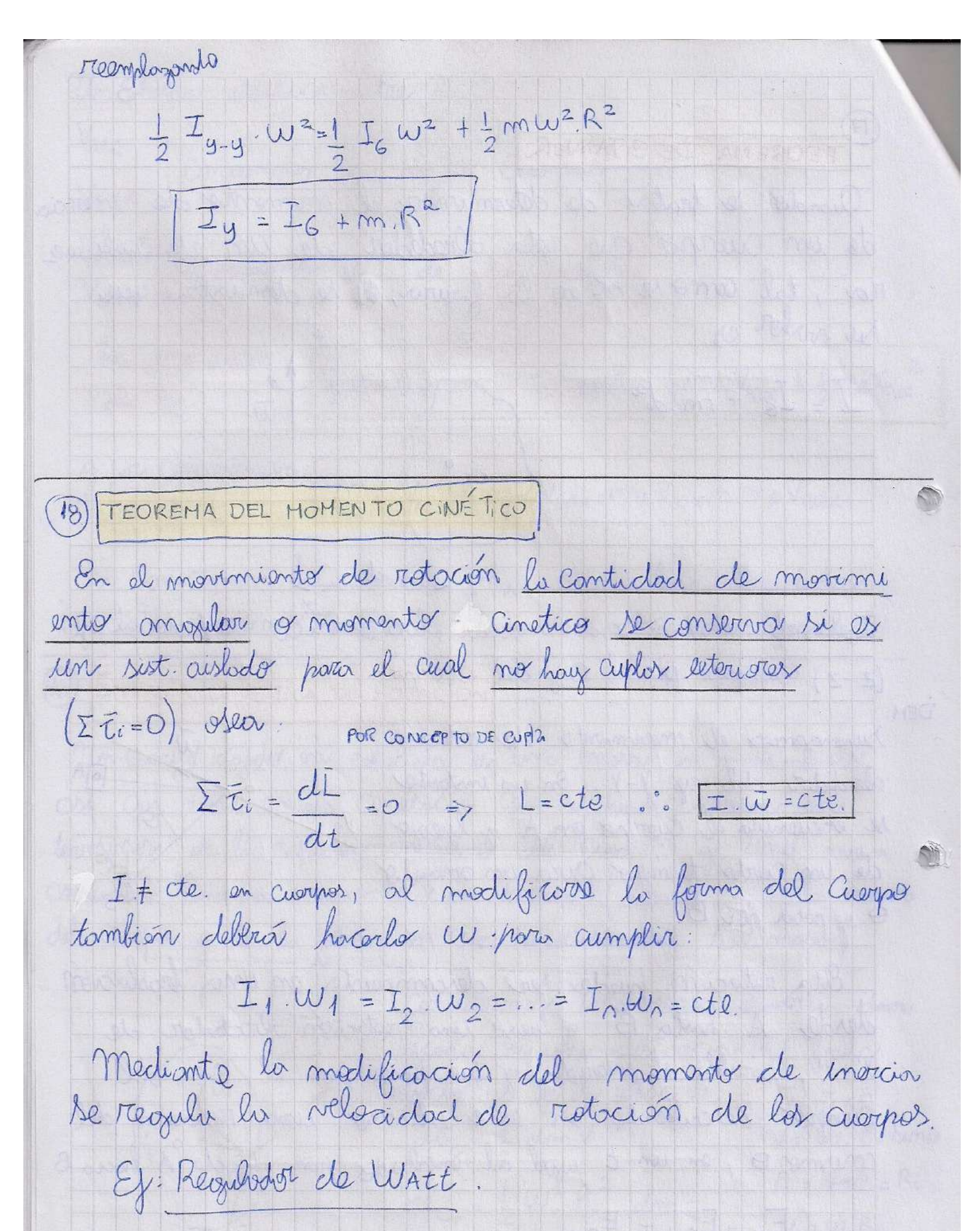
Supongamos el movimiento de rotación alrededor del eje Y-Y. En un instante se encuentra el cuerpo en A y luego de un cierto tiempo gira un angulo θ y pasa a B.



Esta rotación puede ser descompuesta en una traslación desde A hasta B y luego una rotación alrededor de Y'-Y', paralelo al anterior y que pase por el CG del cuerpo describiendo en este ultimo una rotación del mismo θ, en un t igual al empleado para ir de A hacia B.

$$E_c = E_{c_r} + E_{c_t}$$

$$E_{c_r} = \frac{1}{2} I_G w^2 \quad y \quad E_{c_t} = \frac{1}{2} m V^2$$



reemplazando

$$\frac{1}{2} I_{y-y} \cdot w^2 = \frac{1}{2} I_G w^2 + \frac{1}{2} m w^2 . R^2$$

$$\boxed{I_y = I_G + m . R^2}$$

## (18) TEOREMA DEL MOMENTO CINÉTICO

En el movimiento de rotación la cantidad de movimiento angular o momento cinetico se conserva si es un sist. aislado para el cual no hay cuplas exteriores $(\Sigma \bar{\tau}_i = 0)$ osea:

POR CONCEPTO DE CUPLA

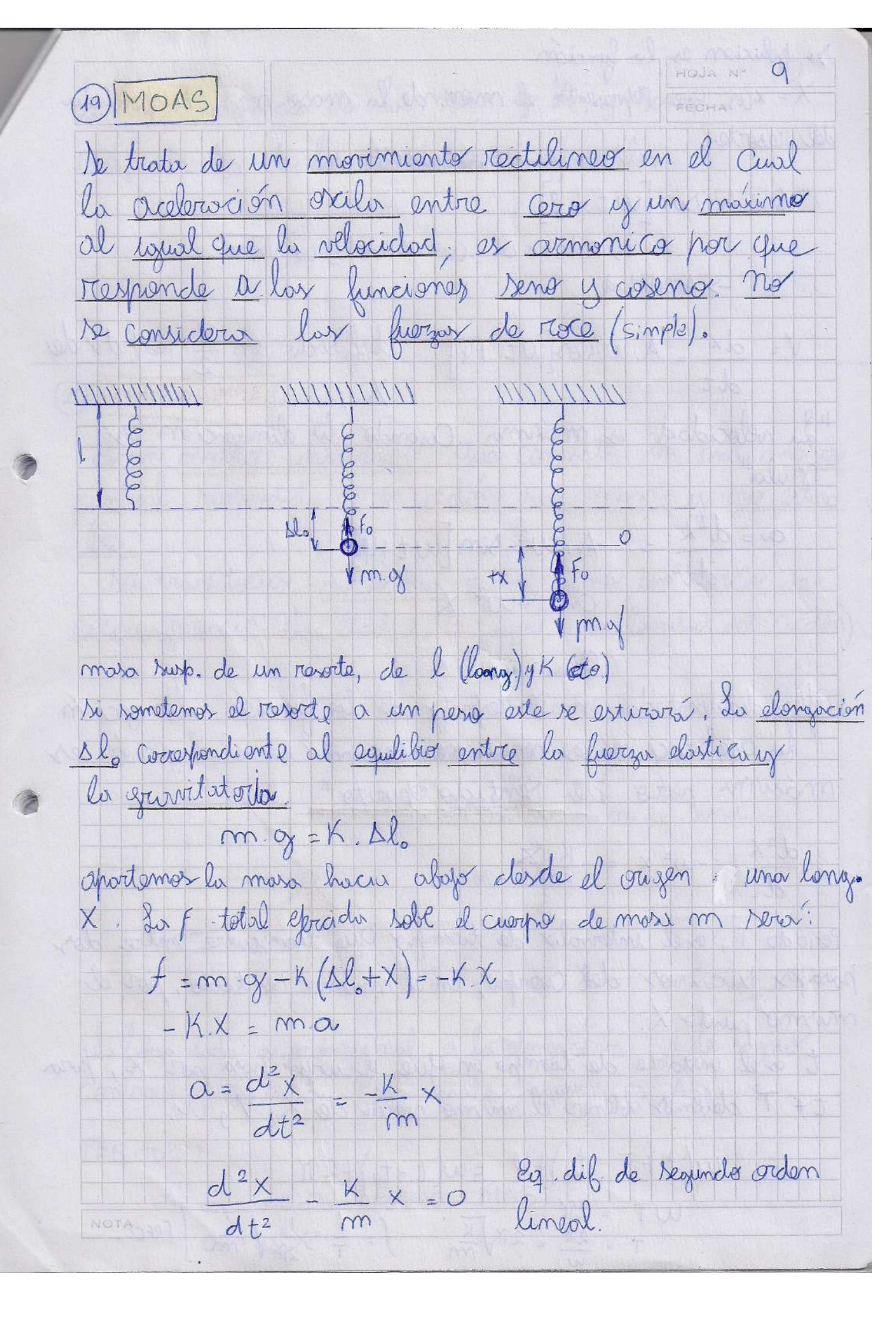
$$\Sigma \bar{\tau}_i = \frac{d\bar{L}}{dt} = 0 \Rightarrow L = cte \quad \therefore \quad \boxed{I . \bar{w} = cte.}$$

$I \neq cte.$ en cuerpos, al modificarse la forma del cuerpo tambien deberá hacerlo $w$ para cumplir:

$$I_1 . w_1 = I_2 . w_2 = \ldots = I_n . w_n = cte.$$

Mediante la modificación del momento de inercia se regula la velocidad de rotación de los cuerpos.

Ej: Regulador de Watt.





(19) MOAS

Se trata de un movimiento rectilineo en el cual la aceleración oscila entre cero y un máximo al igual que la velocidad, es armonico por que responde a las funciones seno y coseno. No se considera las fuerzas de roce (simple).



masa susp. de un resorte, de l (long.) y K (cte)

si sometemos el resorte a un peso este se estirará. La elongación $\Delta l_0$ correspondiente al equilibio entre la fuerza elastica y la gravitatoria.

$$m.g = K.\Delta l_0$$

apartemos la masa hacia abajo desde el origen una long. X. La f total ejercida sobre el cuerpo de masa m será:

$$f = m.g - K(\Delta l_0 + X) = -K.X$$

$$-K.X = m\,a$$

$$a = \frac{d^2X}{dt^2} = -\frac{K}{m}X$$

$$\frac{d^2X}{dt^2} - \frac{K}{m}X = 0$$ Eq. dif de segundo orden lineal.

NOTA

su solución es la función

$X = x(t)$ que representa el mov. de la masa m suspendida del resorte.

$$X = A.\sin[\omega t + \varphi]$$

→ fase inicial.

↳ Pulsación $\omega^2 = K/m$ y $\omega = \sqrt{K/m}$

↳ Amplitud

$$V = \frac{dx}{dt} = A.\omega.\cos[\omega t + \varphi]$$ desfasada en $\frac{\pi}{2}$ respecto de X.

"La velocidad es máxima cuando la elongación es nula"

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A.\omega^2.\sin[\omega t + \varphi]$$

$$a = -\omega^2.X$$

$$a_{MAX} = -\omega^2.X$$

Esta adelantada en $\pi$ respecto de la función elongación

"La aceleración es máxima cuando la elongación es máxima pero de sentido opuesto"

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -\omega^2.X = -\frac{K}{m}X$$

Periodo T; es el intervalo de tiempo que transcurre entre dos pasajes sucesivos del cuerpo, en el mismo sentido, por el mismo punto X.

t es el instante de tiempo en que el cuerpo pasa por X, para t + T debemos obtener el mismo valor de X, V y a.

$$\omega(t + T - t_0) + \varphi = \omega(t - t_0) + 2\pi$$

$$\omega T = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{K}{m}} \qquad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}$$ FRECC.

La f y T depende de la masa y K; y son independientes de las condiciones generales.

---

(20) PENDULO SIMPLE

Es un modelo idealizado que consiste en una masa puntual suspendido de un cordón sin masa y no estirable.

Su trayectoria no es una recta, sino un arco de circunferencia de radio L. (igual a la longitud del cordón)



La fuerza actuante es el peso P, que descomponemos en N y F

SIN EFECTO ←┘

$$F = -P . \sin\alpha = - m . g . \sin\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{X}{l}$$

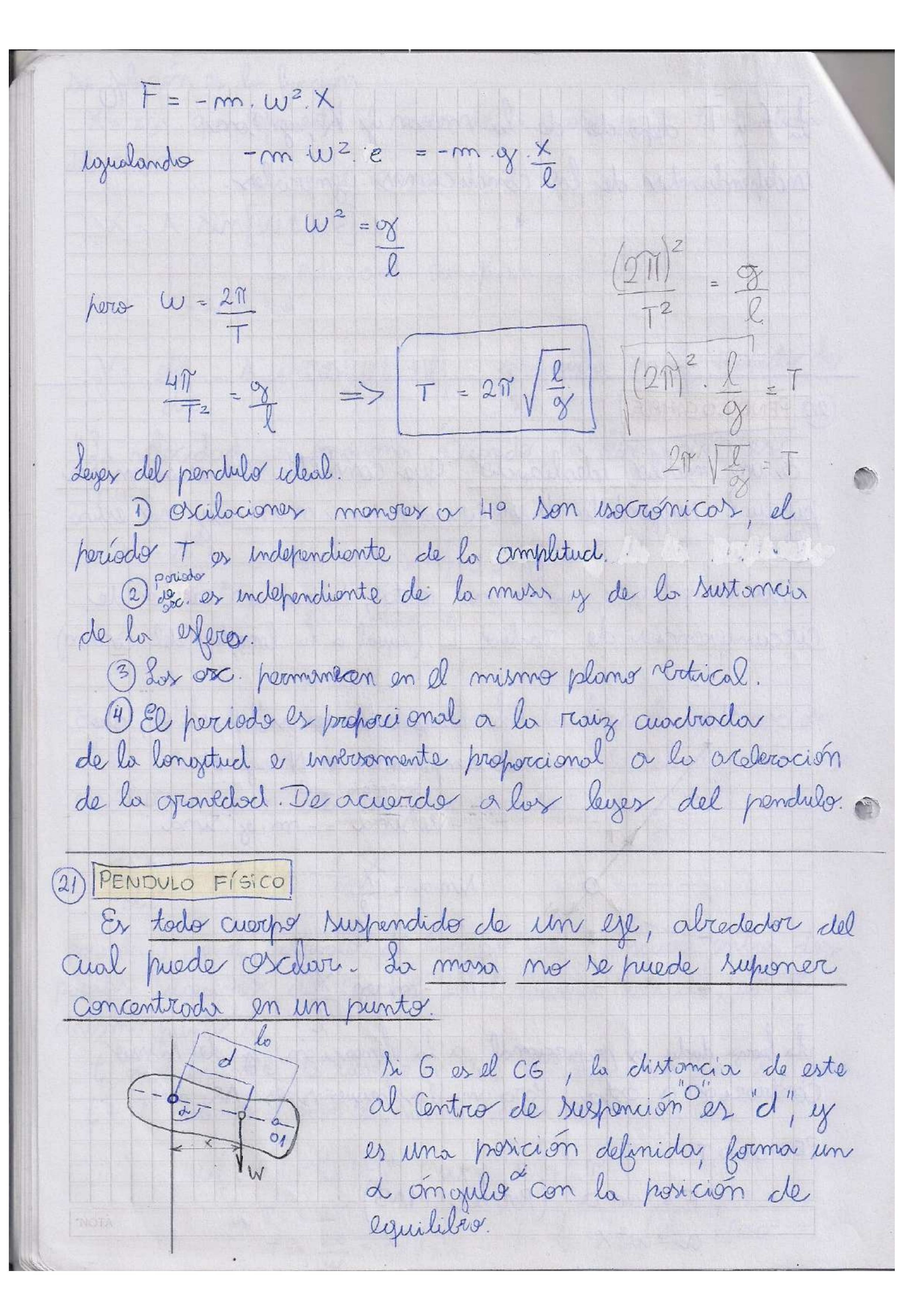
$$F = - m . g . \frac{X}{l}$$

La fuerza dada es proporcional a la elongación y de signo contrario a esta. Para angulos pequeños es AR. SIM.

PERIODO T

$F = m . a$ (Por ser MAS)

$a = w^2 X$




$$F = -m \cdot \omega^2 \cdot X$$

Igualando $\quad -m\,\omega^2\,e = -m\,g\,\dfrac{x}{l}$

$$\omega^2 = \frac{g}{l}$$

pero $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

$$\frac{4\pi}{T^2} = \frac{g}{l} \Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

$$\frac{(2\pi)^2}{T^2} = \frac{g}{l}$$

$$\sqrt{(2\pi)^2 \cdot \frac{l}{g}} = T$$

$$2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = T$$

Leyes del pendulo ideal.

1) oscilaciones menores a 4° son isocrónicas, el período T es independiente de la amplitud.

2) periodo de osc. es independiente de la masa y de la sustancia de la esfera.

3) Las osc. permanecen en el mismo plano vertical.

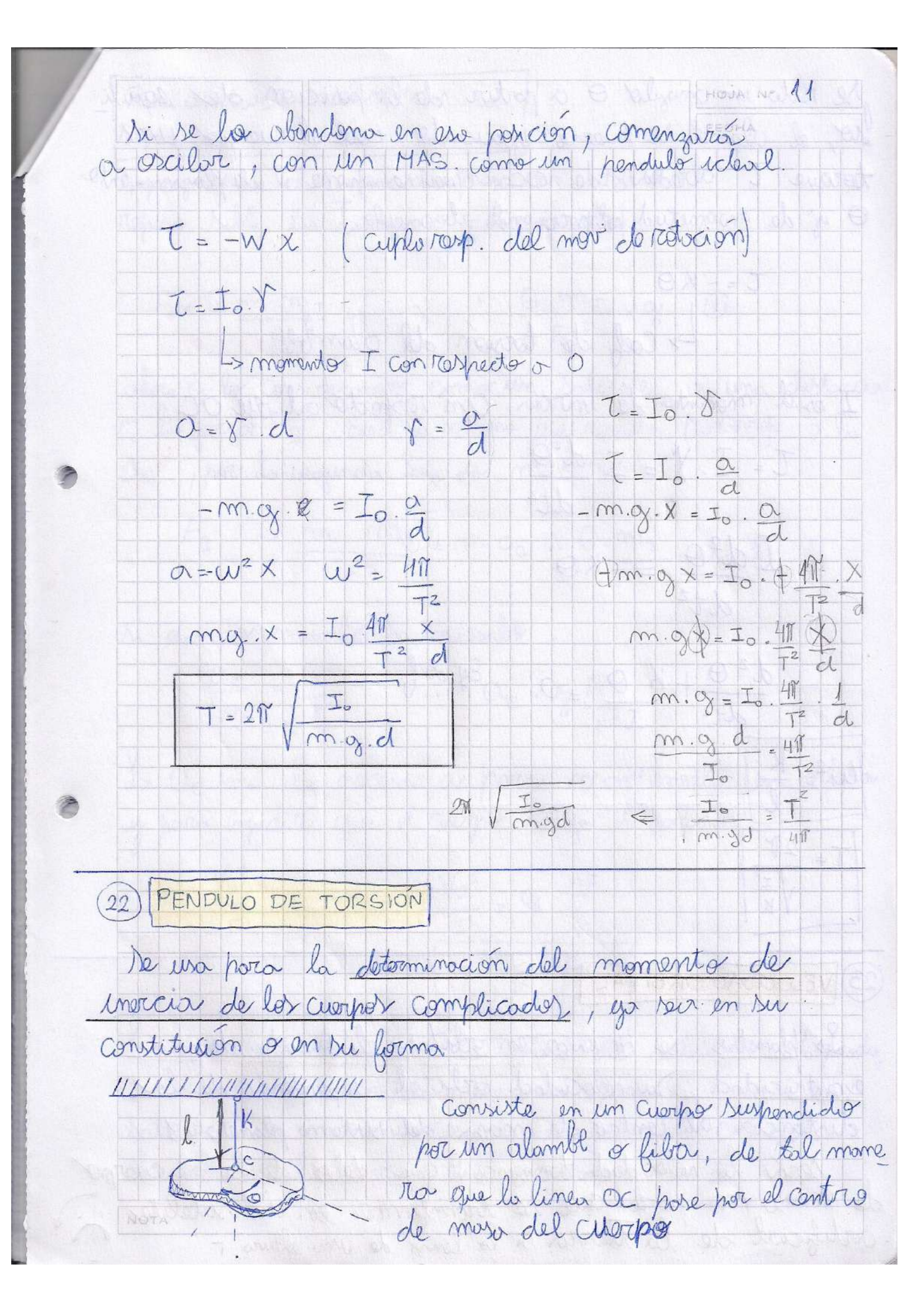
4) El periodo es proporcional a la raiz cuadrada de la longitud e inversamente proporcional a la aceleración de la gravedad. De acuerdo a las leyes del pendulo.

---

(21) PENDULO FÍSICO

Es todo cuerpo suspendido de un eje, alrededor del cual puede oscilar. La masa no se puede suponer concentrada en un punto.

Si G es el CG, la distancia de este al Centro de suspención "O" es "d", y es una posición definida, forma un $\alpha$ ángulo $\alpha$ con la posición de equilibrio.





si se la abandona en esa posición, comenzará a oscilar, con un MAS. como un pendulo ideal.

$\tau = -W x$ (cuplo resp. del mov de rotación)

$\tau = I_0 . \gamma$

↳ momento I con respecto a O

$a = \gamma . d$ $\qquad \gamma = \frac{a}{d}$

$-m.g.x = I_0 . \frac{a}{d}$

$a = \omega^2 x \qquad \omega^2 = \frac{4\pi}{T^2}$

$m.g.x = I_0 \frac{4\pi}{T^2} \frac{x}{d}$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{m.g.d}}$$

$\tau = I_0 . \gamma$

$\tau = I_0 . \frac{a}{d}$

$-m.g.X = I_0 . \frac{a}{d}$

$(-)m.g\,x = I_0 . (-)\frac{4\pi}{T^2} . \frac{X}{d}$

$m.g.x = I_0 . \frac{4\pi}{T^2} \frac{x}{d}$

$m.g = I_0 . \frac{4\pi}{T^2} . \frac{1}{d}$

$\frac{m.g.d}{I_0} = \frac{4\pi}{T^2}$

$\frac{I_0}{m.g.d} = \frac{T^2}{4\pi} \Rightarrow 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{m.g.d}}$

## (22) PENDULO DE TORSIÓN

Se usa para la determinación del momento de inercia de los cuerpos complicados, ya sea en su constitución o en su forma



Consiste en un cuerpo suspendido por un alambre o fibra, de tal manera que la linea OC pase por el centro de masa del cuerpo

se rota un ángulo $\theta$ a partir de la posición de equilibrio, el alambre se tuerce ejerciendo sobre el cuerpo un torque $\tau$ alrededor de OC que se opone al desplazamiento $\theta$ y de magnitud proporcional al ángulo.

$$\tau = -K\theta$$

↳ Coef. de torsión del alambre

I es el momento de inercia con respecto al eje OC.

$$\tau = I \cdot \gamma = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -K\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{K}{I}\theta = 0 \quad \text{Ec dif.}$$

$$\boxed{\omega^2 = \frac{K}{I}}$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{I}{K}}}}$$

---

## (23) VELOCIDAD ORBITAL

Los planetas se mueven en órbitas elípticas de poca excentricidad. Su velocidad orbital dependerá de la distancia al centro de masa del sistema planetario.

Será la velocidad tangencial que debo darle al cuerpo de masa m para que se transforme en un satélite artificial de la Tierra si lo lanzo de una altura r

Para orbitas próximas a la superficie.

Suponemos que el cuerpo de masa m esta en reposo sobl la Tierra o próximo a ella.

$$F_1 = G\frac{m.m_T}{R_T^2} = m.g \therefore \frac{G\,m_T}{R_T^2} = g \quad (1)$$

ahora si lo consideramos como un satélite, a una distancia r, la fuerza $F_2$, será lo mismo que resulta ser prop. a la $a_C$, por la segunda ley de movimiento.

$$F_2 = G\frac{m.m_T}{r^2} = m.a_C \therefore \frac{G.m_T}{r^2} = a_C \quad (2)$$

si divido miembro a miembro

$$\frac{a_C}{g} = \frac{R^2}{r^2} \quad \therefore \quad a_C = g\frac{R^2}{r^2}$$

La $a_C$ será la necesaria para mantenerlo en orbita y para impedir que el cuerpo salga disparado.

$$a_C = \frac{V_0^2}{r} \Rightarrow \frac{V_0^2}{r} = g\cdot\frac{R^2}{r^2}$$

$$\boxed{V_0 = R\sqrt{\frac{g}{r}}}$$

La $V_0$ es <u>independiente de la masa</u> del satélite. $V_0$ produce la fuerza centripeta necesaria para imprimirle al satelite un movimiento de trayectoria circular alrededor de la tierra y a mantenerse en el.

$R = r$

$V_0 = \sqrt{g \cdot R}$

$g = 9{,}8\ m/s^2 = 127.000\ Km/h^2$

$R = 6370\ Km$

$V_0 = 28400\ Km/h = 8\ Km/s$

Los satelites artificiales tienen alturas variables respecto a la Tierra. $V_0$ disminuirá con la altura "r", al aumentar r disminuye g.

para calcular con exactitud debemos introducir el valor de g.

$$g = \frac{G \cdot m_T}{r^2}$$

$$\boxed{V_0 = R\sqrt{\frac{G \cdot m_T}{r^3}}}$$

$\boxed{r = 35790\ Km}$ Con periodo $T = 24\ hs$

El satélite en esta orbita, gira a la misma velocidad angular de la Tierra, parecerá fijo en un punto. ~~Es~~ Se trata de un Satelite Geoestacionario.

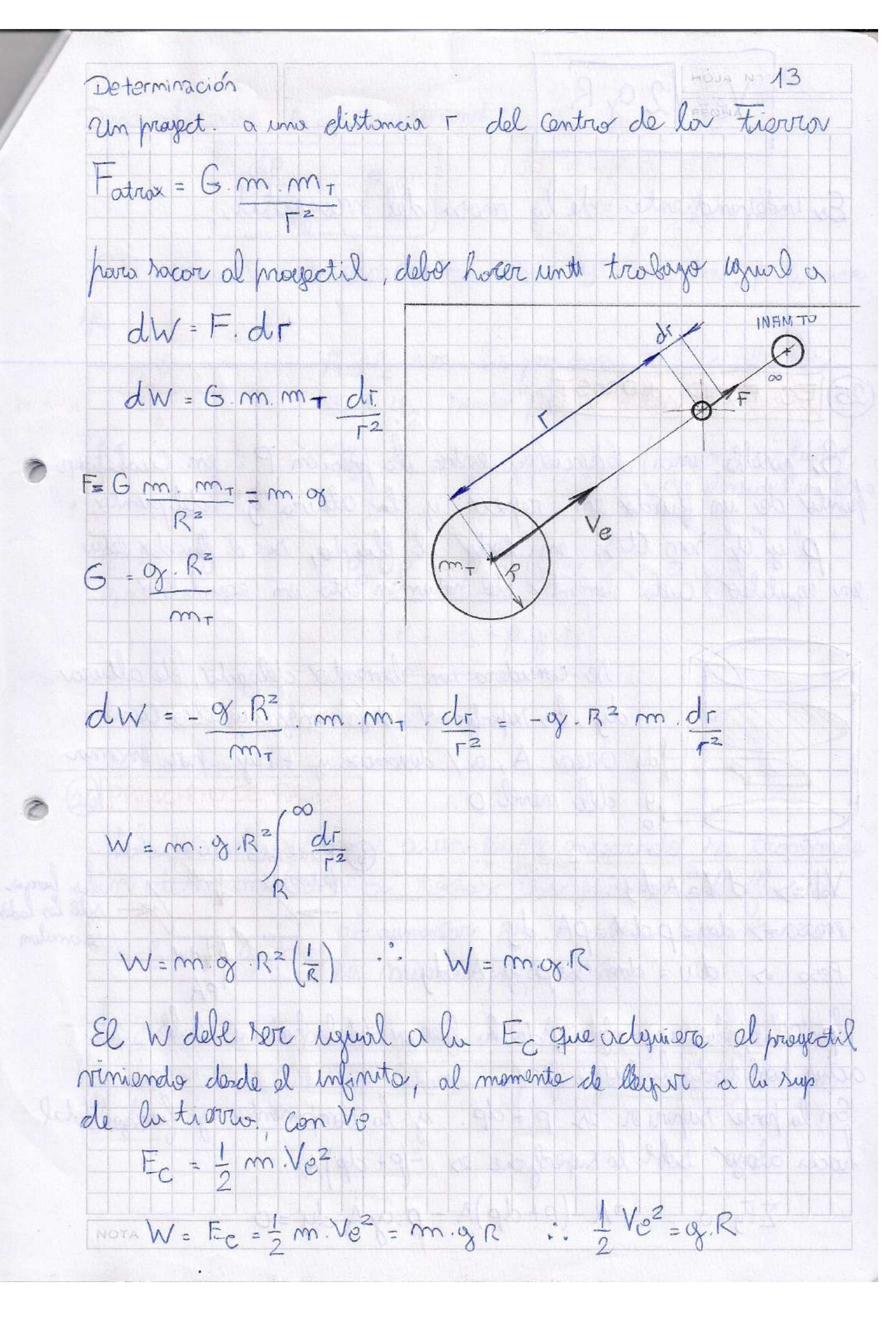
---

## 2) VELOCIDAD DE ESCAPE

Un Cuerpo de masa "m" que escapa de la atracción gravitacional de La Tierra y no regresa, lanzado desde la superficie del planeta con una velocidad inicial $V_e$.

Implica transformar a un cuerpo en un proyectil, expulsado de la tierra con solo el impulso inicial que las permite adquirir la velocidad $V_e$ pueda liberarse del campo Gravitacional terrestre.

NOTA




Determinación

Un proyect. a una distancia $r$ del centro de la Tierra

$$F_{atrac} = G . \frac{m . m_T}{r^2}$$

para sacar al proyectil, debo hacer un trabajo igual a

$$dW = F . dr$$

$$dW = G . m . m_T \frac{dr}{r^2}$$

$$F = G \frac{m . m_T}{R^2} = m . g$$

$$G = \frac{g . R^2}{m_T}$$

$$dW = -\frac{g . R^2}{m_T} . m . m_T . \frac{dr}{r^2} = -g . R^2 \, m \, \frac{dr}{r^2}$$

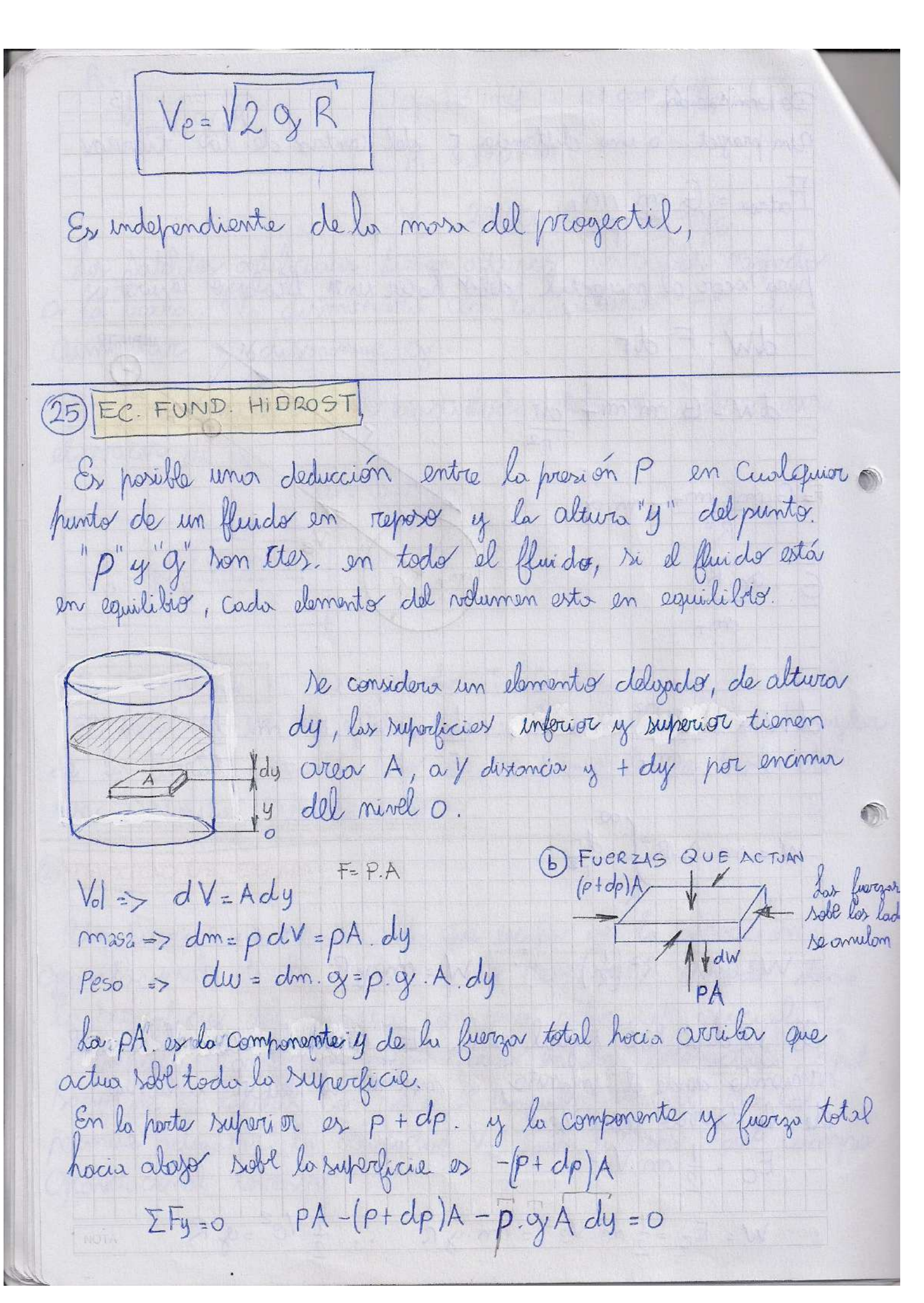
$$W = m . g . R^2 \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2}$$

$$W = m . g . R^2 \left(\frac{1}{R}\right) \quad \therefore \quad W = m . g . R$$

El W debe ser igual a la $E_c$ que adquiere el proyectil viniendo desde el infinito, al momento de llegar a la sup de la tierra, con $V_e$

$$E_c = \frac{1}{2} m . V_e^2$$

NOTA $W = E_c = \frac{1}{2} m . V_e^2 = m . g . R \quad \therefore \quad \frac{1}{2} V_e^2 = g . R$



$$V_e = \sqrt{2 g R}$$

Es independiente de la masa del proyectil,

## (25) EC. FUND. HIDROST

Es posible una deducción entre la presión P en cualquier punto de un fluido en reposo y la altura "y" del punto.

"ρ" y "g" son Ctes. en todo el fluido, si el fluido está en equilibrio, cada elemento del volumen esta en equilibrio.



Se considera un elemento delgado, de altura dy, las superficies inferior y superior tienen area A, a y distancia y + dy por encima del nivel 0.

$F = P.A$

Vol => $dV = A\,dy$

masa => $dm = \rho\,dV = \rho A\,.\,dy$

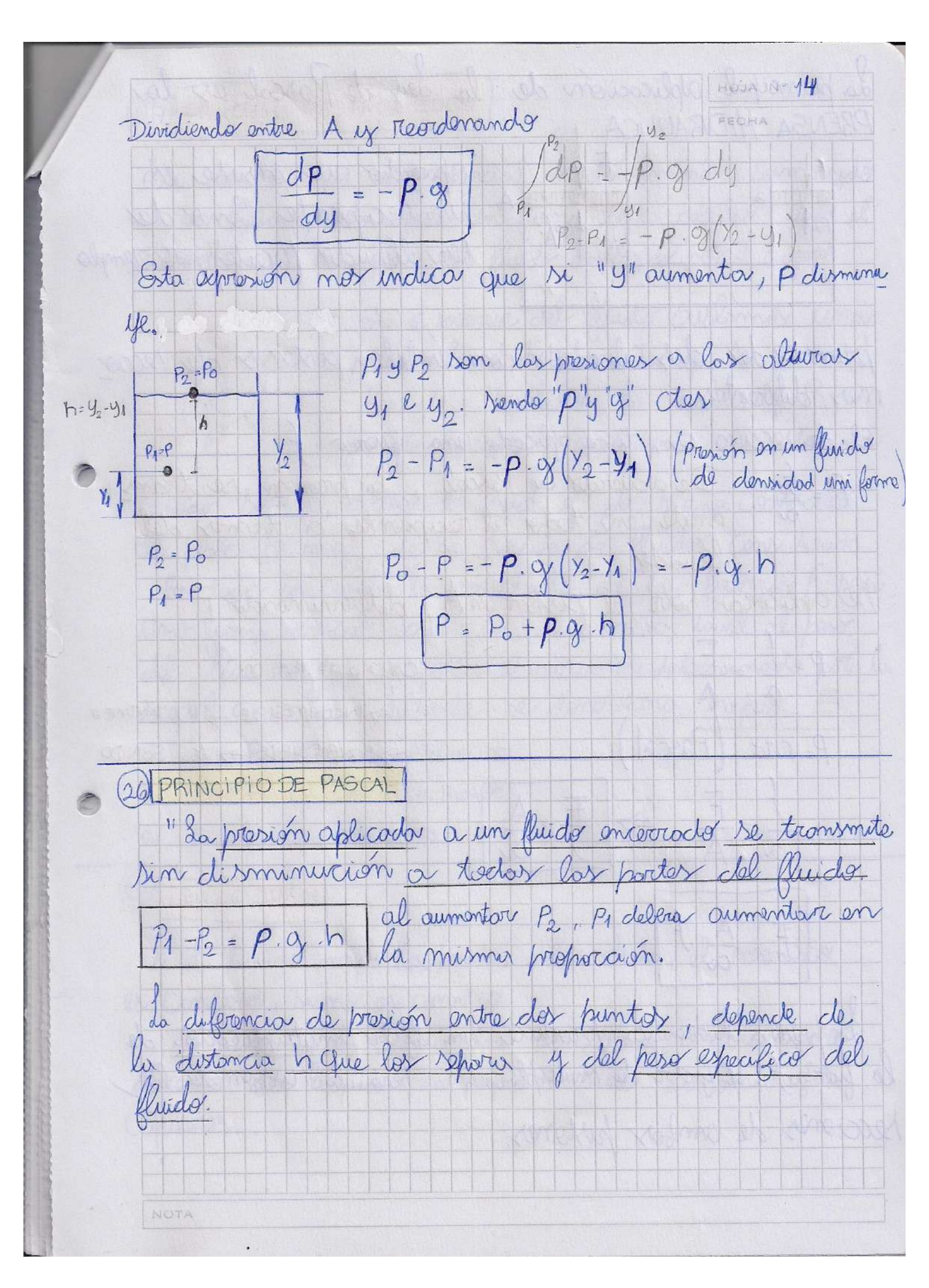
Peso => $dw = dm.\,g = \rho.\,g\,.\,A\,.\,dy$



La pA es la componente y de la fuerza total hacia arriba que actua sobre toda la superficie.

En la parte superior es p + dp. y la componente y fuerza total hacia abajo sobre la superficie es $-(p + dp)A$

$\Sigma F_y = 0 \qquad pA - (p + dp)A - \rho.\,g\,A\,dy = 0$





Dividiendo entre A y reordenando

$$\boxed{\frac{dp}{dy} = -\rho \cdot g}$$

$$\int_{P_1}^{P_2} dP = -\int_{y_1}^{y_2} \rho \cdot g \, dy$$

$$P_2 - P_1 = -\rho \cdot g (y_2 - y_1)$$

Esta expresión nos indica que si "y" aumenta, P disminuye.



$P_1$ y $P_2$ son las presiones a las alturas $y_1$ e $y_2$, siendo "ρ" y "g" ctes

$$P_2 - P_1 = -\rho \cdot g (y_2 - y_1)$$ (Presión en un fluido de densidad uniforme)

$P_2 = P_0$
$P_1 = P$

$$P_0 - P = -\rho \cdot g (y_2 - y_1) = -\rho \cdot g \cdot h$$

$$\boxed{P = P_0 + \rho \cdot g \cdot h}$$

## (26) PRINCIPIO DE PASCAL

"La presión aplicada a un fluido encerrado se transmite sin disminución a todas las partes del fluido.

$$\boxed{P_1 - P_2 = \rho \cdot g \cdot h}$$

al aumentar $P_2$, $P_1$ deberá aumentar en la misma proporción.

La diferencia de presión entre dos puntos, depende de la distancia h que los separa y del peso específico del fluido.

La principal aplicación de la Ley de Pascal es la PRENSA HIDRAULICA

F a Pa F A PA

aparato que consiste en un recipiente lleno de un líquido (aceite) por ejemplo

provisto de dos cilindros con émbolos pistones de secciones diferentes.

El de seccion a; tiene aplicada una fuerza f

$P = \frac{f}{a}$ De acuerdo a Pascal, la presión se transmite en todo el recipiente a traves del líquido.

Se aplicará sobre el piston en A, determinando F.

$P = \frac{f}{a} = \frac{F}{A}$

$P = cte$ (Pascal)

$\frac{f}{a} = \frac{F}{A} \Rightarrow \boxed{\frac{F}{f} = \frac{A}{a}}$

$\boxed{F = \frac{A}{a} \cdot f}$

CAMBIO DE PRESIÓN
- → INCOMPRESIBLE → INSTANTANEO
- → COMPRESIBLE → VEL. SONIDO

La prensa hidraulica produce un efecto multiplicador de la fuerza f; el factor de multiplicacion sera la razón de las secciones de ambos pistones.

NOTA

## (27) PRINCIPIO DE ARQUIMEDES

"Si un cuerpo esta parcial o totalmente sumergido en un fluido, este ejerce una fuerza hacia arriba sobe el cuerpo igual al peso del fluido desplazado por el cuerpo."

En el interior del fluido aislamos una porción limitada por una sup. A.
En el equilibio la resultante R de las fuerzas f que ejerce el resto del líquido sobe A, debera ser igual y de signo contrario al peso ($P = m\,g$), de la porción de fluido considerado.
En todos los casos la resultante de las fuerzas f será una fuerza vertical dirigida hacia arriba, igual al peso del líquido que ocuparía el volumen determinado por la superficie. La resultante se denomina empuje. E

Si $E > P$ EL CUERPO ASCIENDE

Si $E < P$ EL CUERPO SE HUNDE

Si $E = P$ EL CUERPO FLOTA

## (28) LEY DE JURIN

Si el líquido moja las paredes del solido, el menisco es concavo, si no es convexo.

A raiz de la capilaridad se observa un ascenso o descenso del líquido en pequeños tubos denominados capilares.

NOTA

al subir el líquido lo hace por la $\tau_{LV}$ que actúa en la circunferencia superior adherida al tubo y que genera la fuerza que proyectada se designa F y que se eq. con el peso de la columna líquida W.

$$P_e = \frac{W}{V}$$

$$P_e = P_{dens} \cdot g$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$F_y = 2\pi \cdot R \cdot \tau_{LV} \cdot \cos\theta$$

$$W = \pi \cdot R^2 \cdot h \cdot \rho$$ → Peso específico

Fy, $\tau_{LV}$, TUBO, AIRE, h, θ, W, LIQUIDO, 2R

$$F_y = W \Rightarrow 2\pi R \cdot \tau_{LV} \cos\theta = \pi \cdot R^2 \cdot h \cdot \rho$$

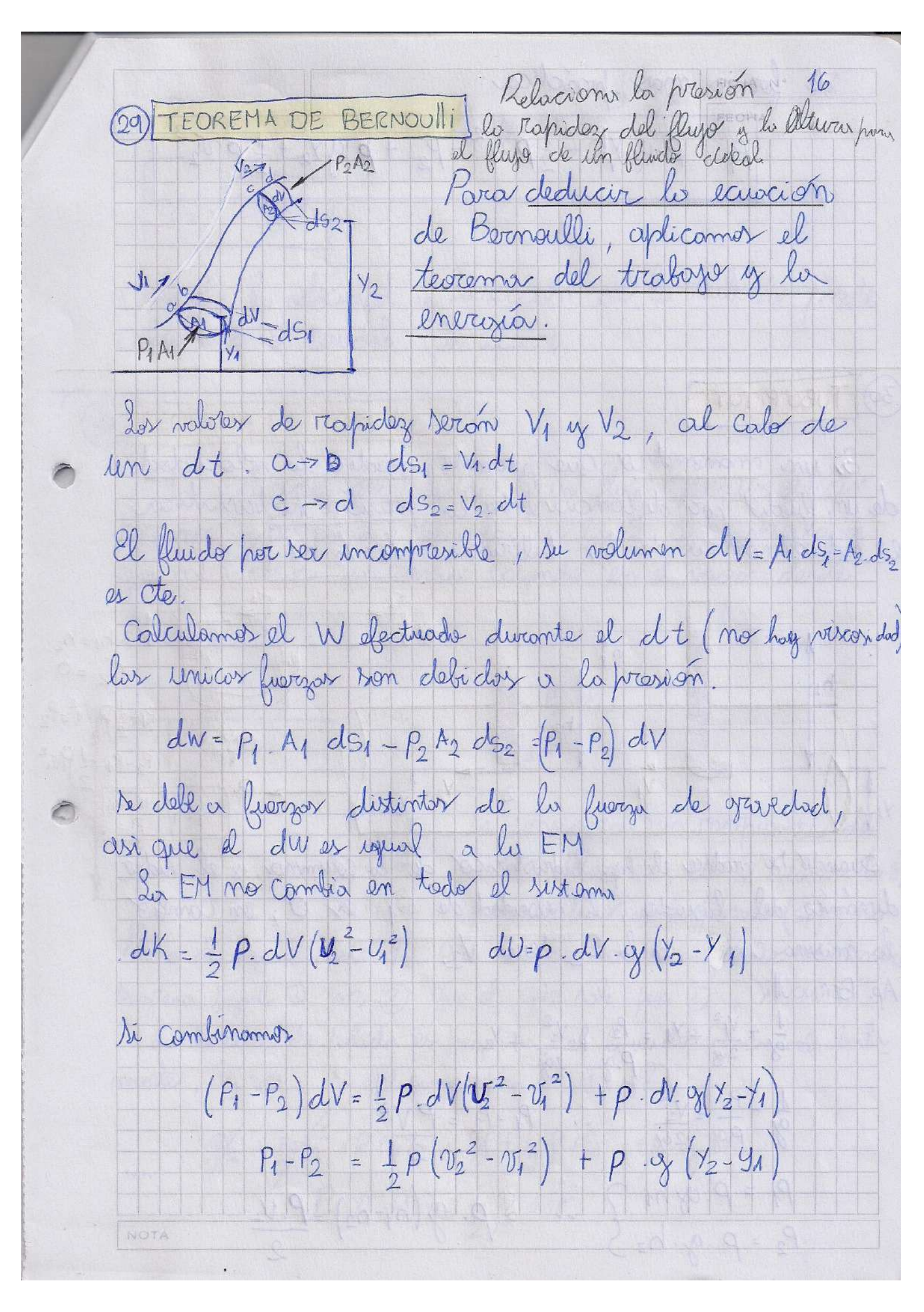
$$\boxed{h = \frac{2 \cdot \tau_{LV} \cdot \cos\theta}{\rho \cdot R}}$$

El signo de Y varía + (0° a 90°) MOJA AL SOLIDO
− (90° a 180) NO " " "

si a la expresión la multiplico por R

$$h_R = \frac{2\,\tau_{LV} \cdot \cos\theta}{\rho} = a^2$$

$a^2 = h \cdot R$ cte. de capilaridad.





## (29) TEOREMA DE BERNOULLI

Relaciona la presión, la rapidez del flujo y la altura para el flujo de un fluido ideal.



Para deducir la ecuación de Bernoulli, aplicamos el teorema del trabajo y la energía.

Los valores de rapidez serán $V_1$ y $V_2$, al cabo de un $dt$. $a \to b$ $\quad dS_1 = V_1 \cdot dt$

$c \to d$ $\quad dS_2 = V_2 \cdot dt$

El fluido por ser incompresible, su volumen $dV = A_1\, dS_1 = A_2 \cdot dS_2$ es cte.

Calculamos el W efectuado durante el $dt$ (no hay viscosidad) las únicas fuerzas son debidas a la presión.

$$dW = P_1 \cdot A_1\, dS_1 - P_2 A_2\, dS_2 = (P_1 - P_2)\, dV$$

se debe a fuerzas distintas de la fuerza de gravedad, así que el dW es igual a la EM

La EM no cambia en todo el sistema

$$dK = \frac{1}{2} \rho \cdot dV (v_2^2 - v_1^2) \qquad dU = \rho \cdot dV \cdot g (Y_2 - Y_1)$$

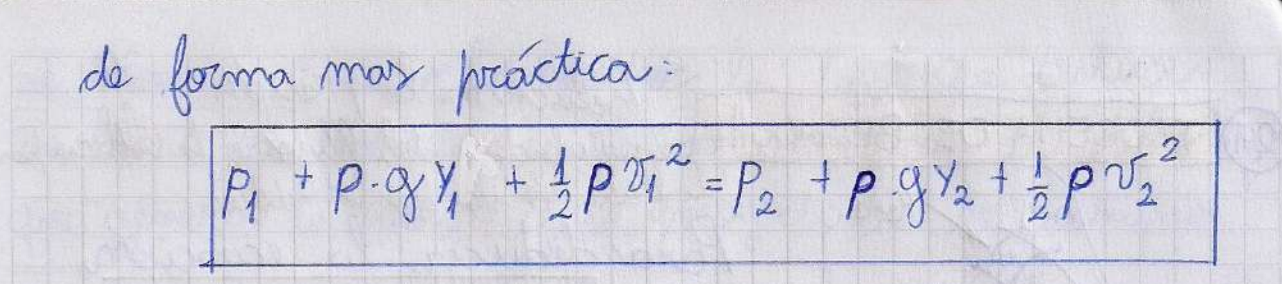
Si combinamos

$$(P_1 - P_2)\, dV = \frac{1}{2} \rho \cdot dV (v_2^2 - v_1^2) + \rho \cdot dV \cdot g (Y_2 - Y_1)$$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) + \rho \cdot g (Y_2 - Y_1)$$

NOTA

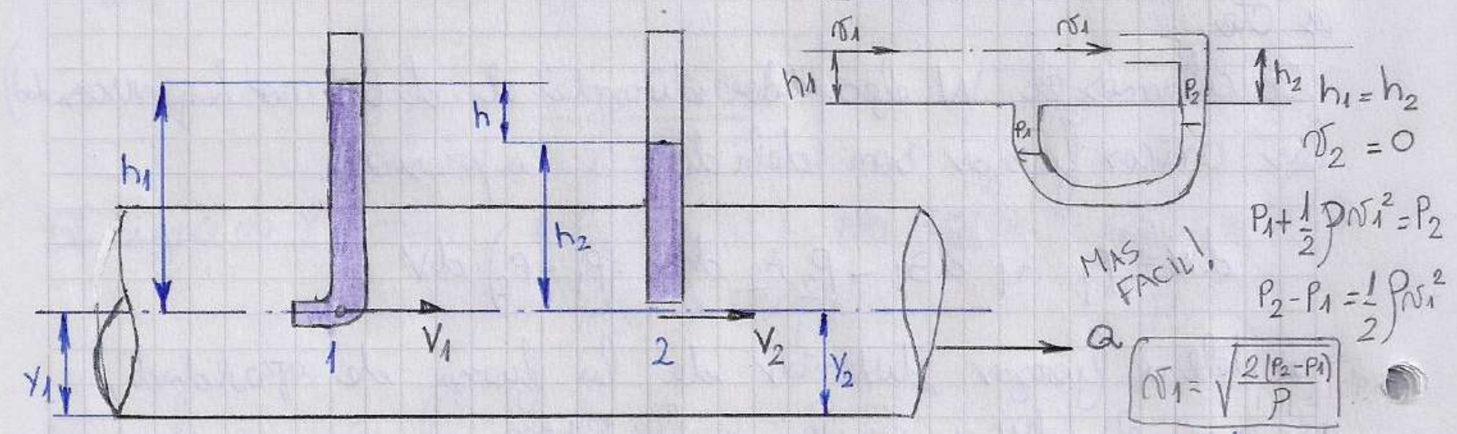
de forma mas práctica:



$$P_1 + \rho \cdot g Y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho \cdot g Y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

## (30) TUBO PITOT

Es un manometro que permite medir la velocidad de un fluido por diferencia entre la presión hidrostatica e hidrodinamica de las tuberias. $Y_1 = Y_2 = Y$



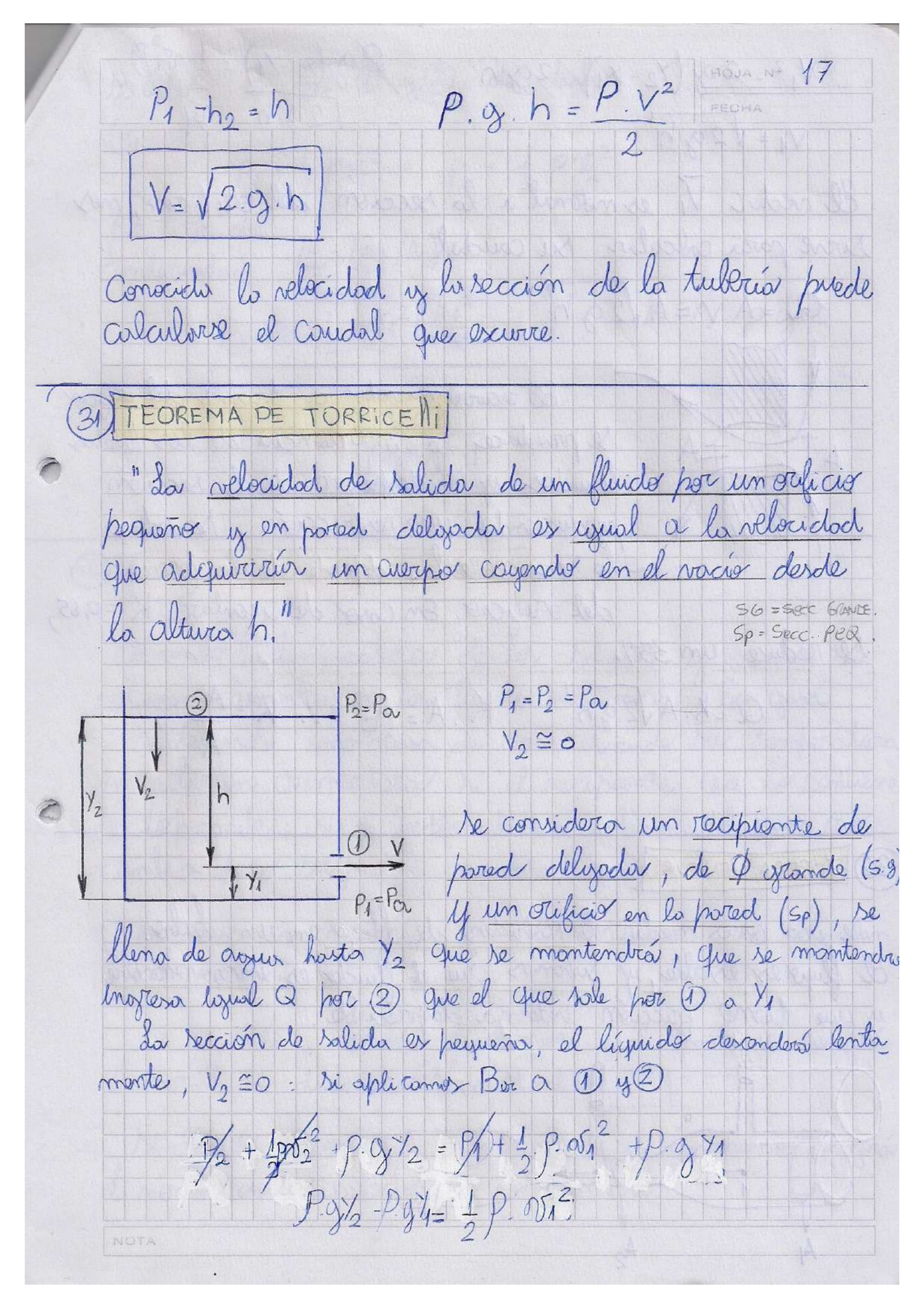

Cuando se produce el eq. hidrostático de la columna y el hidrodinámico del líquido, la velocidad de $S_1$ es 0; en cambio la misma cond. en la $S_2$ sera $V_2$.

Ap. BERNOULLI

$$\frac{1}{g} + \frac{V_1^2}{2g} + Y_1 = \frac{P_2}{\rho \cdot g} + \frac{V_2^2}{2g} + Y_2$$

$$\frac{1}{g} - \frac{P_2}{\rho \cdot g} = \frac{V_2^2}{2g} \quad \therefore \quad P_1 - P_2 = \frac{\rho V^2}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= \rho \cdot g\, h_1 \\ P_2 &= \rho \cdot g \cdot h_2 \end{aligned}\right\} \quad \therefore \quad \rho \cdot g (h_1 - h_2) = \frac{\rho \cdot V_2}{2}$$





$P_1 - h_2 = h$ $\qquad$ $\rho . g . h = \frac{\rho . V^2}{2}$

$$V = \sqrt{2.g.h}$$

Conocida la velocidad y la sección de la tubería puede calcularse el caudal que escurre.

## (31) TEOREMA DE TORRICELLI

"La velocidad de salida de un fluido por un orificio pequeño y en pared delgada es igual a la velocidad que adquiriría un cuerpo cayendo en el vacío desde la altura h."

SG = Secc GRANDE.
Sp = Secc. PEQ.



$P_1 = P_2 = P_a$

$V_2 \cong 0$

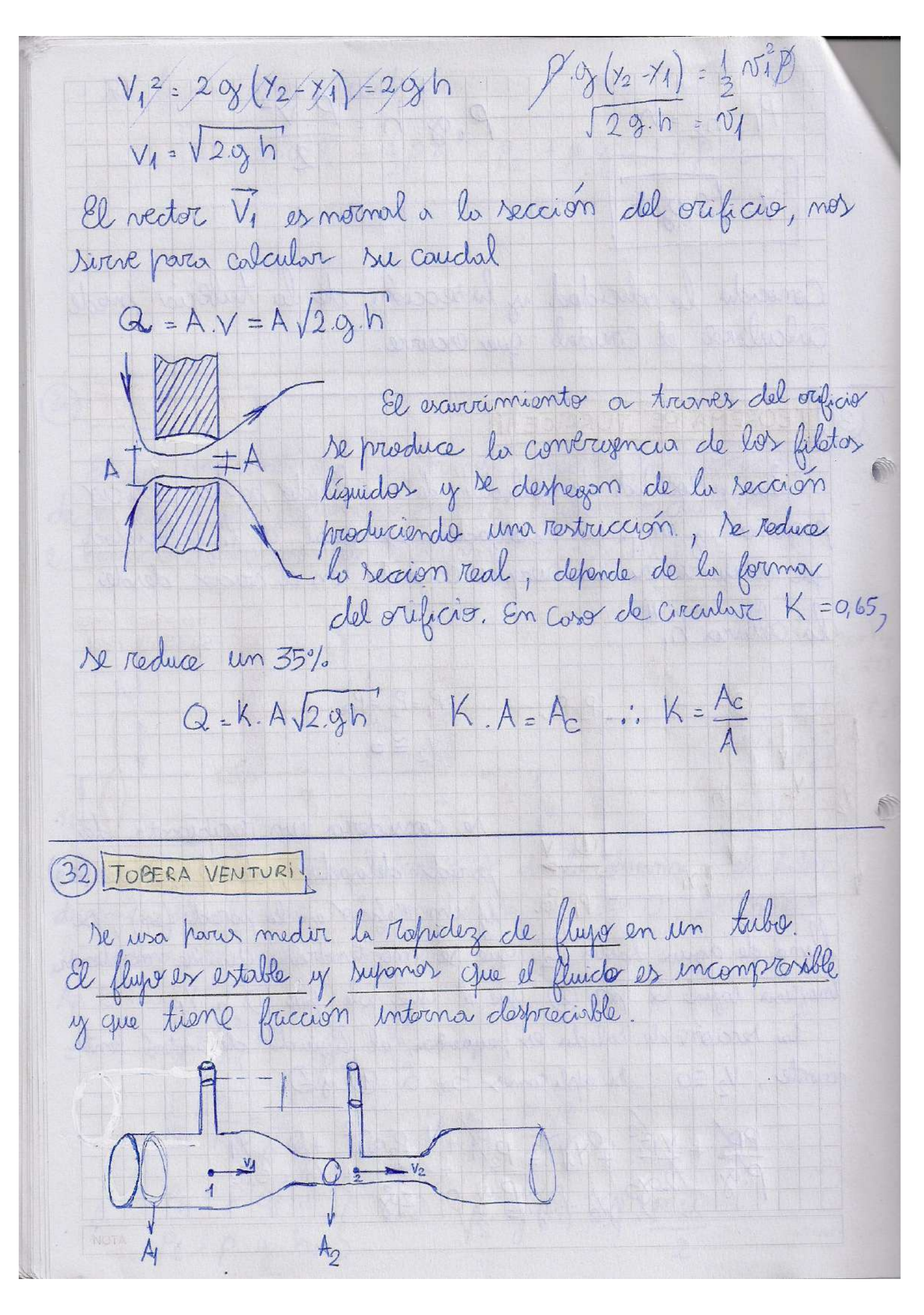
Se considera un recipiente de pared delgada, de Φ grande (S.g) y un orificio en la pared (Sp), se llena de agua hasta $Y_2$ que se mantendrá, que se mantendrá ingresa igual Q por ② que el que sale por ① a $Y_1$

La sección de salida es pequeña, el líquido descenderá lentamente, $V_2 \cong 0$ : si aplicamos Ber a ① y ②

$$P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho . g Y_2 = P_1 + \frac{1}{2}\rho . v_1^2 + \rho . g Y_1$$

$$\rho . g Y_2 - \rho g Y_1 = \frac{1}{2}\rho . v_1^2$$

NOTA



$$V_1^2 = 2g(y_2 - y_1) = 2gh \qquad \rho g (y_2 - y_1) = \frac{1}{2} v_1^2 \rho$$

$$V_1 = \sqrt{2 g h} \qquad \sqrt{2 g h} = v_1$$

El vector $\vec{V_1}$ es normal a la sección del orificio, nos sirve para calcular su caudal

$$Q = A \cdot V = A\sqrt{2 g h}$$

A ≠A

El escurrimiento a traves del orificio se produce la convergencia de los filetes líquidos y se despegan de la sección produciendo una restricción, se reduce la seccion real, depende de la forma del orificio. En caso de circular $K = 0{,}65$, se reduce un 35%.

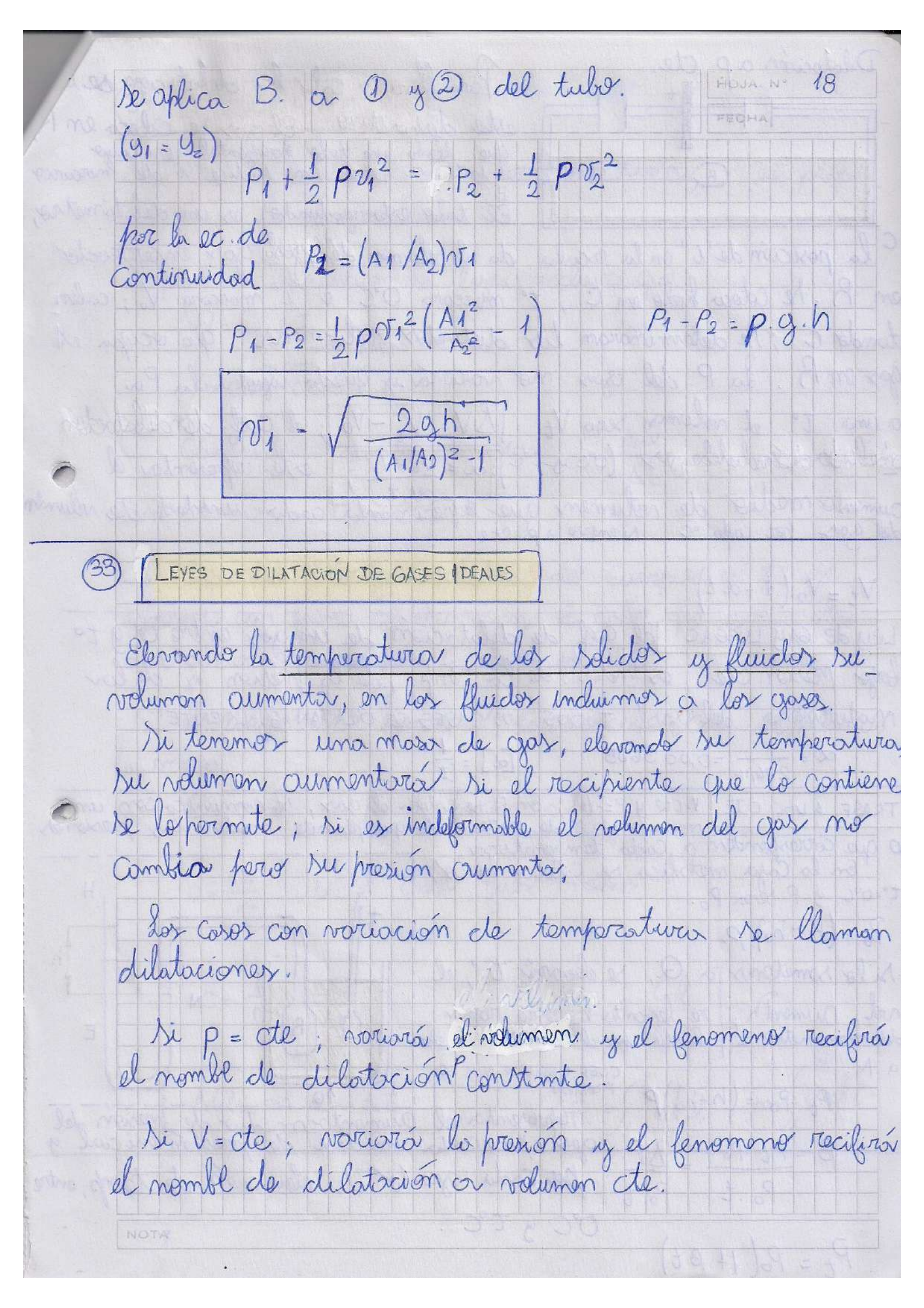
$$Q = K \cdot A\sqrt{2 g h} \qquad K \cdot A = A_C \quad \therefore \quad K = \frac{A_C}{A}$$

---

## (32) TOBERA VENTURI

Se usa para medir la rapidez de flujo en un tubo. El flujo es estable y suponer que el fluido es incompresible y que tiene fricción interna despreciable.

$v_1$ 1 $v_2$ 2 $A_1$ $A_2$





Se aplica B. a ① y ② del tubo.
$(y_1 = y_2)$

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

por la ec. de Continuidad $P_2 = (A_1/A_2)v_1$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho v_1^2\left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1\right) \qquad P_1 - P_2 = \rho \cdot g \cdot h$$

$$\boxed{v_1 = \sqrt{\frac{2gh}{(A_1/A_2)^2 - 1}}}$$

---

## (33) LEYES DE DILATACIÓN DE GASES IDEALES

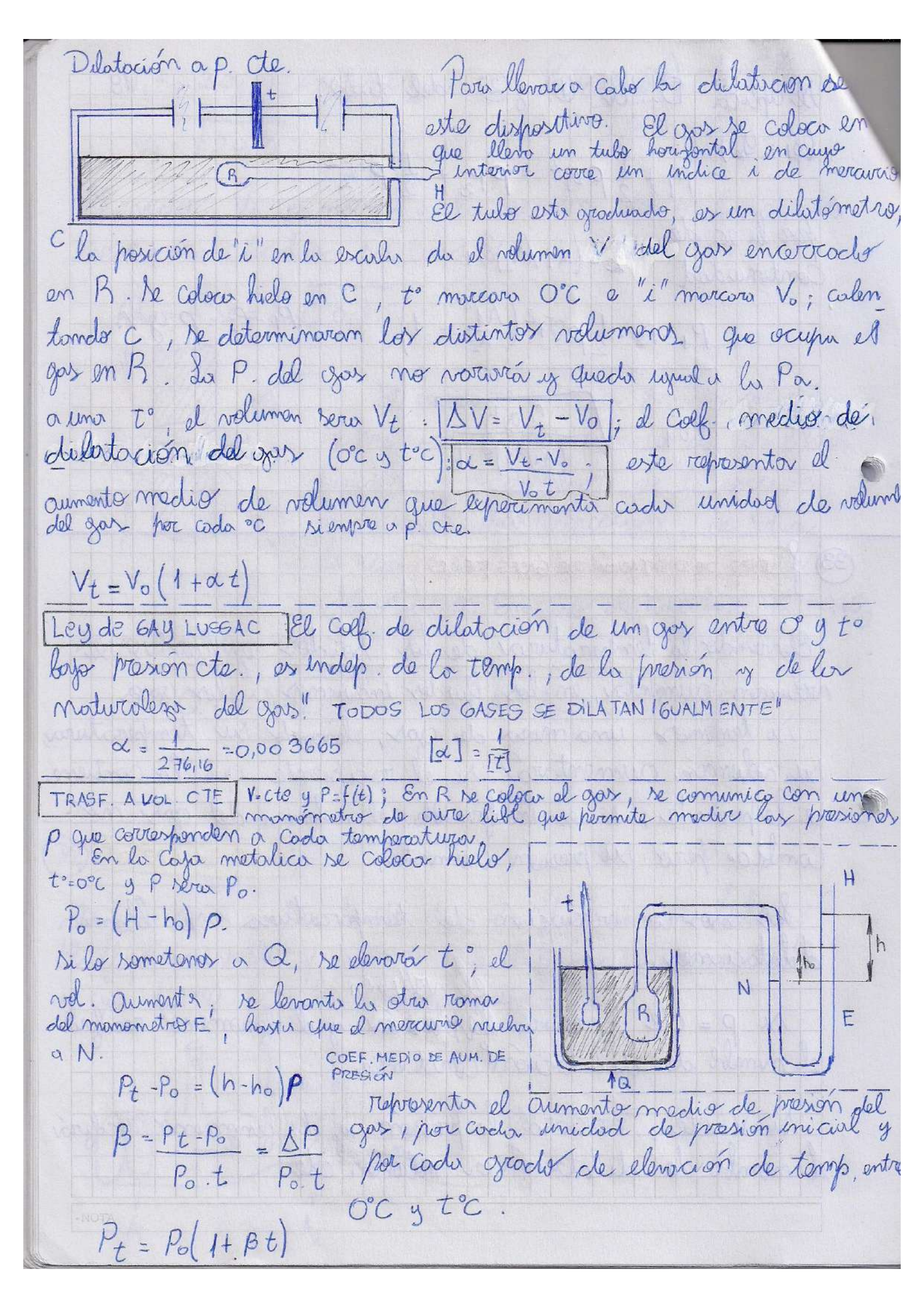
Elevando la temperatura de los sólidos y fluidos su volumen aumenta, en los fluidos incluimos a los gases.

Si tenemos una masa de gas, elevando su temperatura su volumen aumentará si el recipiente que lo contiene se lo permite; si es indeformable el volumen del gas no cambia pero su presión aumenta.

Los casos con variación de temperatura se llaman dilataciones.

Si $p = cte$ ; variará el volumen y el fenomeno recibirá el nombre de dilatación P constante.

Si $V = cte$ ; variará la presión y el fenomeno recibirá el nombre de dilatación a volumen cte.



## Dilatación a p. cte.



Para llevar a cabo la dilatación se este dispositivo. El gas se coloca en que lleva un tubo horizontal en cuyo interior corre un índice i de mercurio. El tubo esta graduado, es un dilatómetro, la posición de "i" en la escala da el volumen V del gas encerrado en R. Se coloca hielo en C, t° marcara 0°C e "i" marcara $V_0$; calentando C, se determinaran los distintos volumenes que ocupa el gas en R. La P. del gas no variará y queda igual a la Pa.

a una T°, el volumen sera $V_t$ : $\Delta V = V_t - V_0$; el Coef. medio de dilatación del gas (0°C y t°C): $\alpha = \frac{V_t - V_0}{V_0 t}$; este representa el aumento medio de volumen que experimenta cada unidad de volumen del gas por cada °C siempre a p. cte.

$$V_t = V_0 (1 + \alpha t)$$

---

**Ley de GAY LUSSAC** El Coef. de dilatación de un gas entre 0° y t° bajo presión cte., es indep. de la temp., de la presión y de la naturaleza del gas." TODOS LOS GASES SE DILATAN IGUALMENTE"

$$\alpha = \frac{1}{276{,}16} = 0{,}003665 \qquad [\alpha] = \frac{1}{[t]}$$

---

**TRASF. A VOL. CTE** V = cte y P = f(t); En R se coloca el gas, se comunica con un manómetro de aire libre que permite medir las presiones p que corresponden a cada temperatura.

En la caja metalica se coloca hielo, t° = 0°C y P sera $P_0$.

$$P_0 = (H - h_0)\,\rho$$



Si lo sometemos a Q, se elevará t°; el vol. aumenta; se levanta la otra rama del manometro E, hasta que el mercurio vuelva a N.

$$P_t - P_0 = (h - h_0)\,\rho$$

COEF. MEDIO DE AUM. DE PRESIÓN

$$\beta = \frac{P_t - P_0}{P_0 \cdot t} = \frac{\Delta P}{P_0 \cdot t}$$

representa el aumento medio de presión del gas, por cada unidad de presión inicial y por cada grado de elevación de temp. entre 0°C y t°C.

$$P_t = P_0 (1 + \beta t)$$

# (34) EC. CALORIMETRIA

$\Delta Q$ es la cantidad de calor que tiene, es proporcional a la temperatura.

Despues de experiencias se logra concluir que

$\Delta Q = C \cdot \Delta t$

→ SALTO TERMICO.
→ CTE. PROP
→ CANT. CALOR

C = Capacidad Calorifica media $C = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$

Con $\Delta t \to 0$ $\quad C_V = \frac{dQ}{dt}$

$C_V$= Capacidad Calorifica verdadera del cuerpo a t° y representa con buena aproximación el calor que es necesario dar al cuerpo a t° para calentarlo en 1°C.

Si el cuerpo es homogeneo, la capacidad cal. es prop. a la masa.

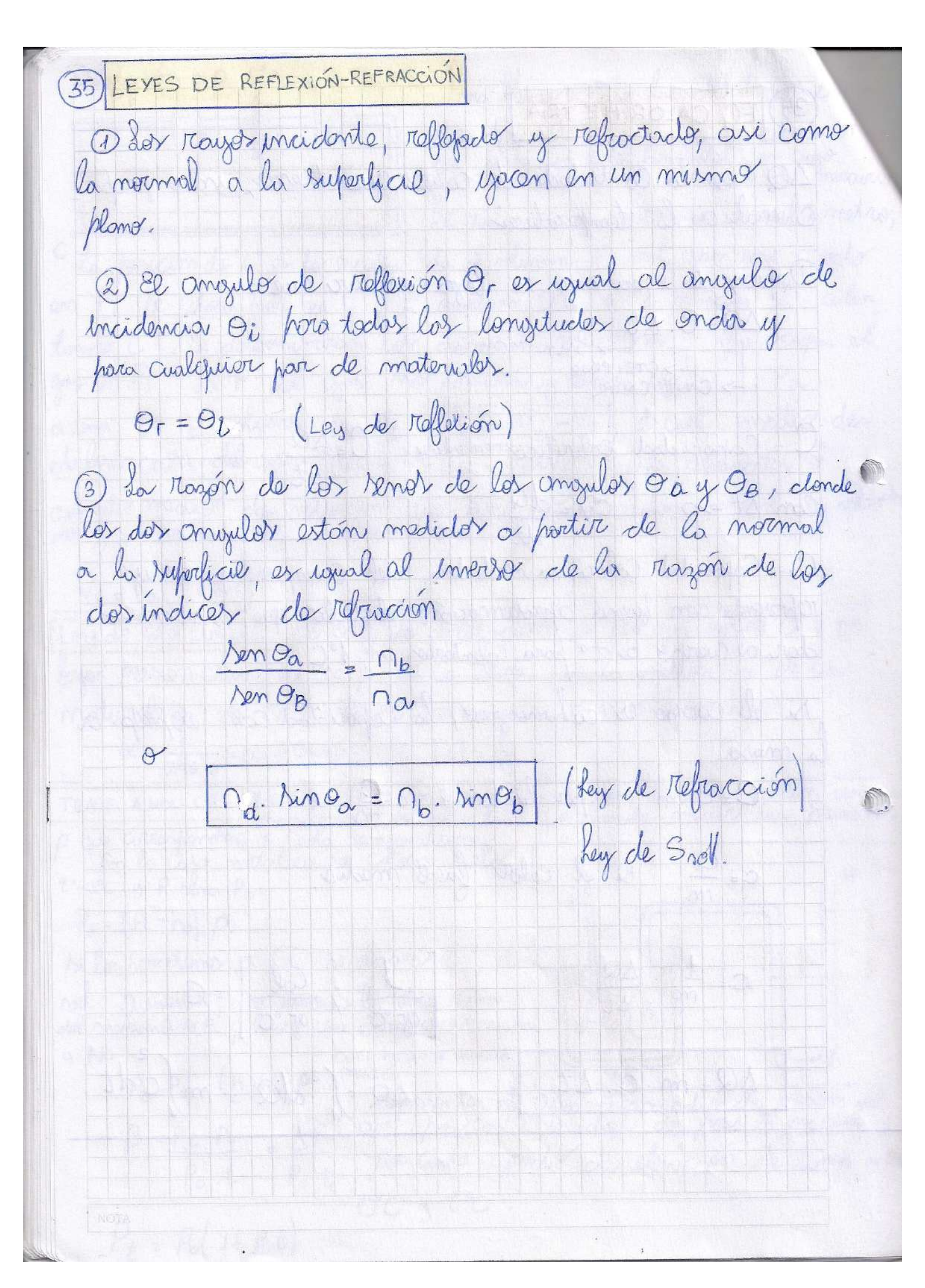
$C = c \cdot m$ por lo tanto $c = \frac{C}{m}$

$c = \frac{C_V}{m}$ si el calor fuese medio.

$c = \frac{1}{m} \cdot \frac{\Delta Q}{\Delta t}$ $\quad \left[ \frac{J}{gr\,°C} ; \frac{Cal}{gr\,°C} \right] = c$

$$\boxed{\Delta Q = m \cdot c \cdot \Delta t}$$

$$\Delta Q = \int_1^2 dQ = m \int_1^2 c\, dt$$



## (35) LEYES DE REFLEXIÓN-REFRACCIÓN

① Los rayos incidente, reflejado y refractado, así como la normal a la superficie, yacen en un mismo plano.

② El ángulo de reflexión $\theta_r$ es igual al ángulo de incidencia $\theta_i$ para todas las longitudes de onda y para cualquier par de materiales.

$$\theta_r = \theta_i \quad \text{(Ley de reflexión)}$$

③ La razón de los senos de los ángulos $\theta_a$ y $\theta_B$, donde los dos ángulos están medidos a partir de la normal a la superficie, es igual al inverso de la razón de los dos índices de refracción

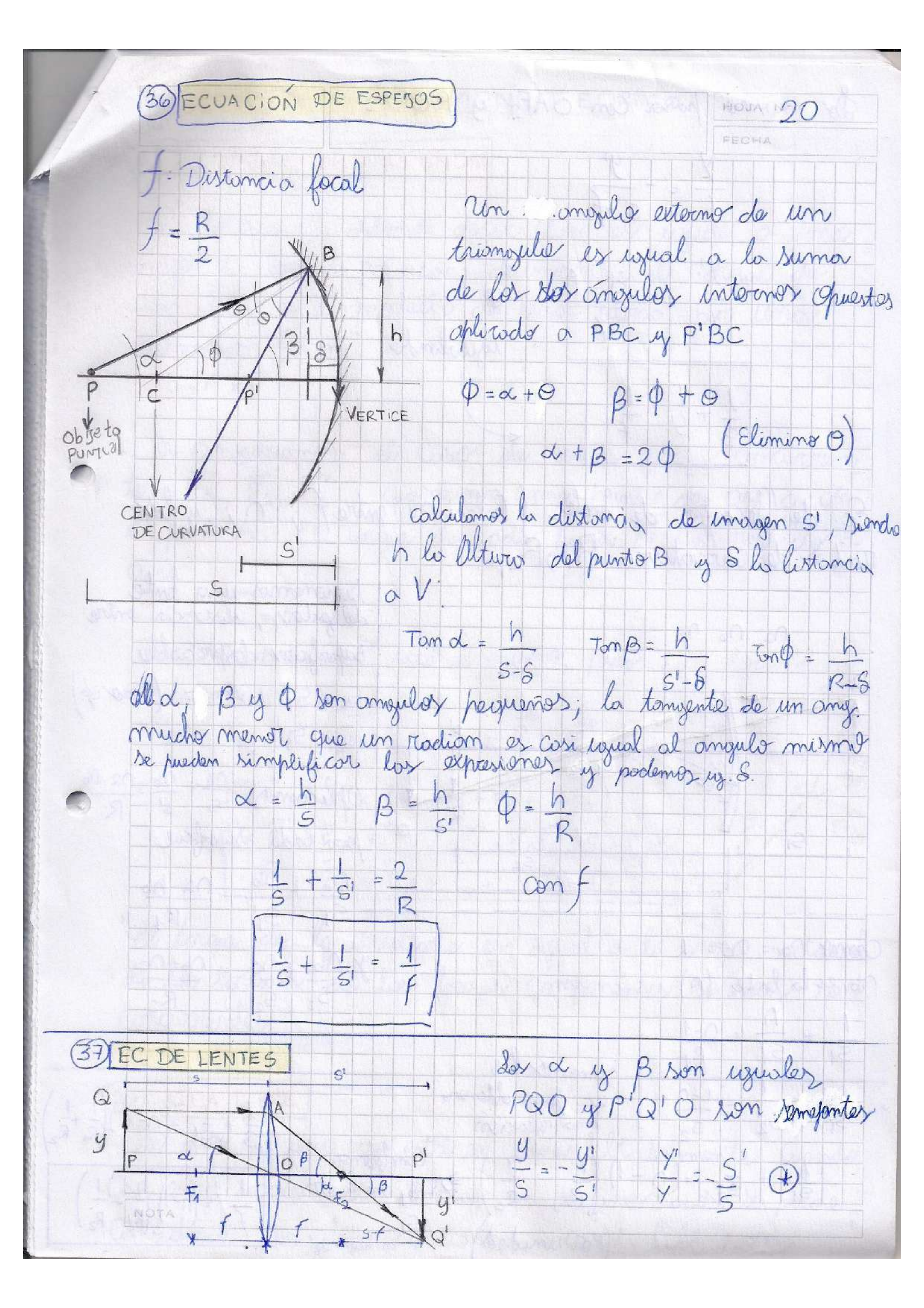
$$\frac{\operatorname{sen}\theta_a}{\operatorname{sen}\theta_B} = \frac{n_b}{n_a}$$

o

$$\boxed{n_a \cdot \sin\theta_a = n_b \cdot \sin\theta_b}$$

(Ley de refracción)

Ley de Snell.



# (36) ECUACIÓN DE ESPEJOS

HOJA N° 20

FECHA

$f$: Distancia focal

$f = \frac{R}{2}$



Un ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos internos opuestos aplicado a PBC y P'BC

$\phi = \alpha + \theta$ $\quad \beta = \phi + \theta$

$\alpha + \beta = 2\phi$ (Elimino $\theta$)

calculamos la distancia de imagen $S'$, siendo $h$ la altura del punto B y $\delta$ la distancia a V.

$\tan \alpha = \frac{h}{S-\delta}$ $\quad \tan \beta = \frac{h}{S'-\delta}$ $\quad \tan \phi = \frac{h}{R-\delta}$

$\alpha$, $\beta$ y $\phi$ son ángulos pequeños; la tangente de un ang. mucho menor que un radián es casi igual al ángulo mismo se pueden simplificar las expresiones y podemos ig. $\delta$.

$\alpha = \frac{h}{S}$ $\quad \beta = \frac{h}{S'}$ $\quad \phi = \frac{h}{R}$

$\frac{1}{S} + \frac{1}{S'} = \frac{2}{R}$ $\quad$ con $f$

$$\boxed{\frac{1}{S} + \frac{1}{S'} = \frac{1}{f}}$$

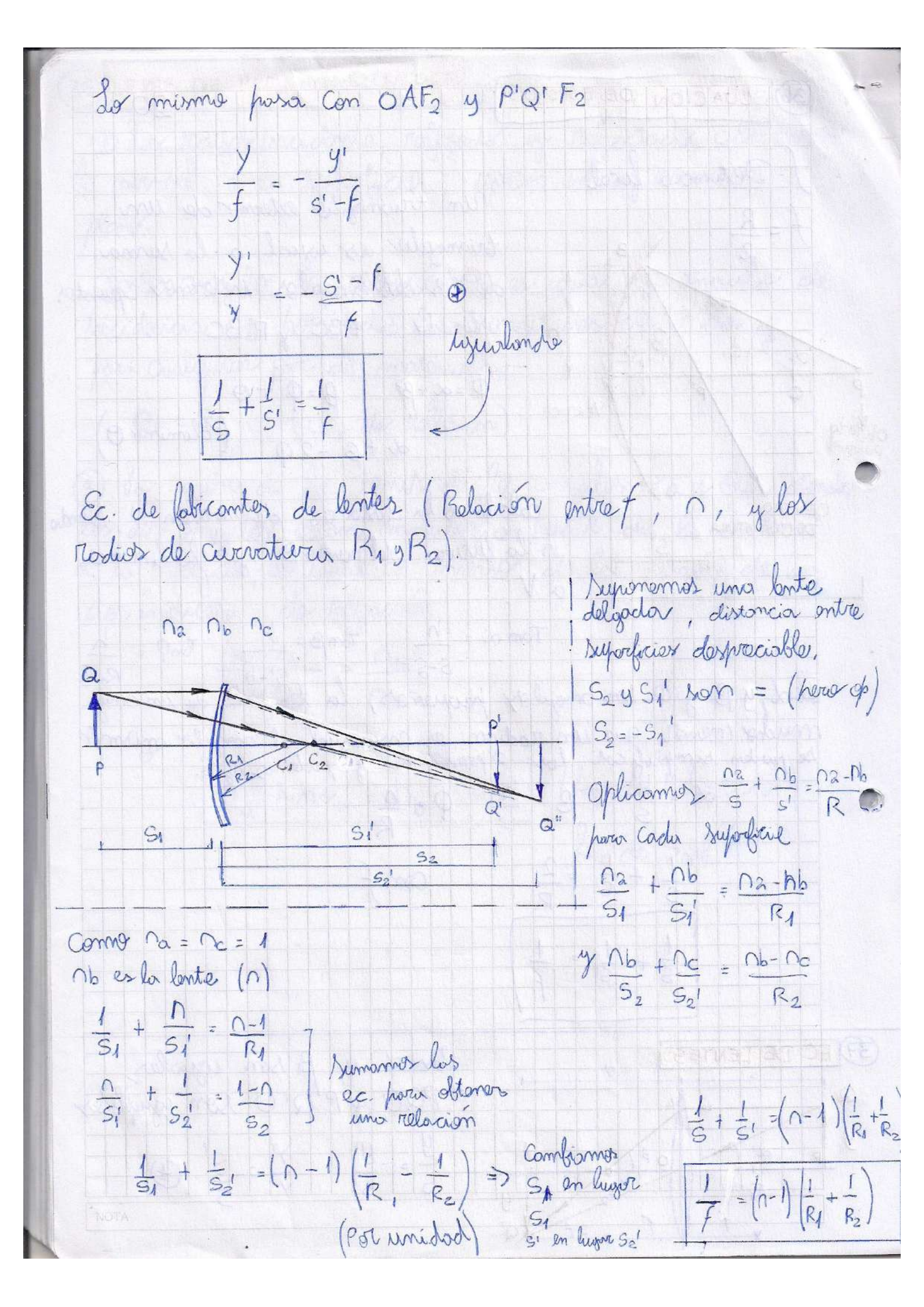
# (37) EC. DE LENTES



Los $\alpha$ y $\beta$ son iguales

PQO y P'Q'O son semejantes

$\frac{y}{S} = -\frac{y'}{S'}$ $\quad \frac{y'}{y} = -\frac{S'}{S}$ (*)



Lo mismo pasa con $OAF_2$ y $P'Q'F_2$

$$\frac{y}{f} = -\frac{y'}{s'-f}$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{s'-f}{f} \quad (*)$$

Igualando

$$\boxed{\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}}$$

Ec. de fabricantes de lentes (Relación entre $f$, $n$, y los radios de curvatura $R_1$ y $R_2$).



Suponemos una lente delgada, distancia entre superficies despreciable, $S_2$ y $S_1'$ son = (pero φ)

$S_2 = -S_1'$

Aplicamos $\frac{n_a}{s} + \frac{n_b}{s'} = \frac{n_a - n_b}{R}$ para cada superficie

$$\frac{n_a}{S_1} + \frac{n_b}{S_1'} = \frac{n_a - n_b}{R_1}$$

y $$\frac{n_b}{S_2} + \frac{n_c}{S_2'} = \frac{n_b - n_c}{R_2}$$

Como $n_a = n_c = 1$

$n_b$ es la lente $(n)$

$$\frac{1}{S_1} + \frac{n}{S_1'} = \frac{n-1}{R_1}$$

$$\frac{n}{S_1'} + \frac{1}{S_2'} = \frac{1-n}{S_2}$$

sumamos las ec. para obtener una relación

$$\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2'} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \Rightarrow$$

(Por unidad)

Cambiamos $S_1$ en lugar $S_1$, $S'$ en lugar $S_2'$

$$\frac{1}{S} + \frac{1}{S'} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)}$$